وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المعهد التقني / السماوة

قسم تكنولوجيا المعلومات والاتصالات

اسم المادة : رياضيات

مدرسة المادة : م.م لقاء طارق هادي

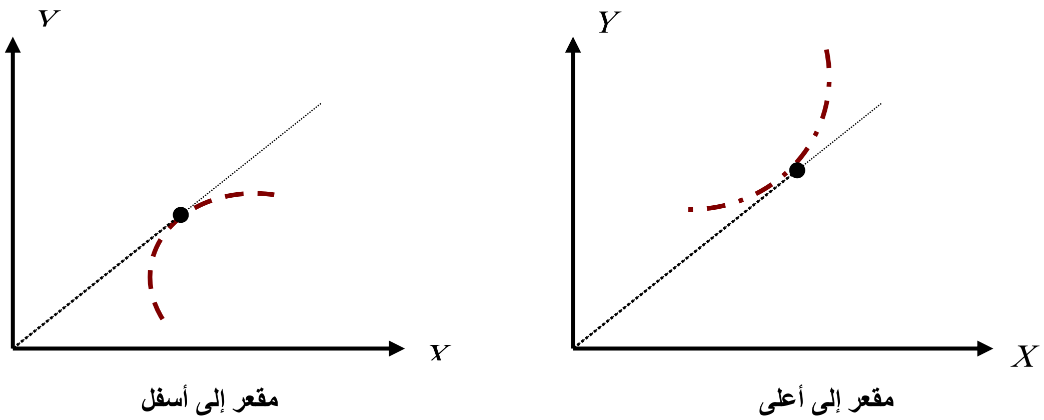
- الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة
- النهايات العظمى والصغرى
- مناطق التحدب والتقعر
- التكامل
- التكامل غير محدد

الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة

الدالة المتزايدة :

الدالة $f(x)$ تسمى تزايدية في الفترة المفتوحة اذا كان $u < v$ متضمنة $f(u) < f(v)$ لكل قيم u و v في الفترة . الدالة $f(x)$ تسمى تزايدية عند $x = x_0$ اذا كانت $f(x)$ تزداد في الفترة المفتوحة محتوية x_0.

اذا كانت $f'(x_0) > 0$ اذن تكون الدالة $f(x)$ هي دالة تزايدية عند x .



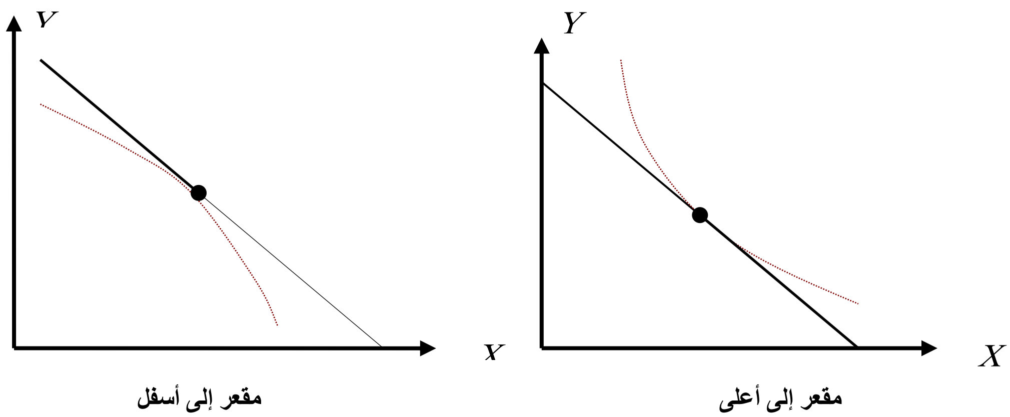
الدوال المتزايدة

الدالة المتناقصة:

الدالة $f(x)$ تسمى تناقصية في الفترة المفتوحة اذا كان $u > v$ متضمنة $f(u) > f(v)$ لكل قيم u و v في الفترة . الدالة $f(x)$ تسمى تناقصية عند $x = x_0$ اذا كانت $f(x)$ تتناقص في الفترة المفتوحة محتوية x_0.

اذا كانت $f'(x_0) < 0$ اذن تكون الدالة $f(x)$ هي دالة تناقصية عند x .

اما اذا كانت $f'(x_0) = 0$ اذن $f(x)$ هي دالة مستقرة .



شكل رقم (2-2) الدوال المتناقصة

مثال : لتكن $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$ دالة اوجد

1 – النقطة الحرجة . 2 - الفترات التي فيها y تزايدية وتناقصية .

الحل : 1-

$$y' = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

بوضع $y' = 0$ يعطى القيم الحرجة $x = 2$ ، $x = -3$.

$$y = \frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2 - 6(2) + 8 = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}(-3)^3 + \frac{1}{2}(-3)^2 - 6(-3) + 8 = \frac{43}{2}$$

النقط الحرجة هي $(2,2/3)$ و $(-3, 43/2)$.

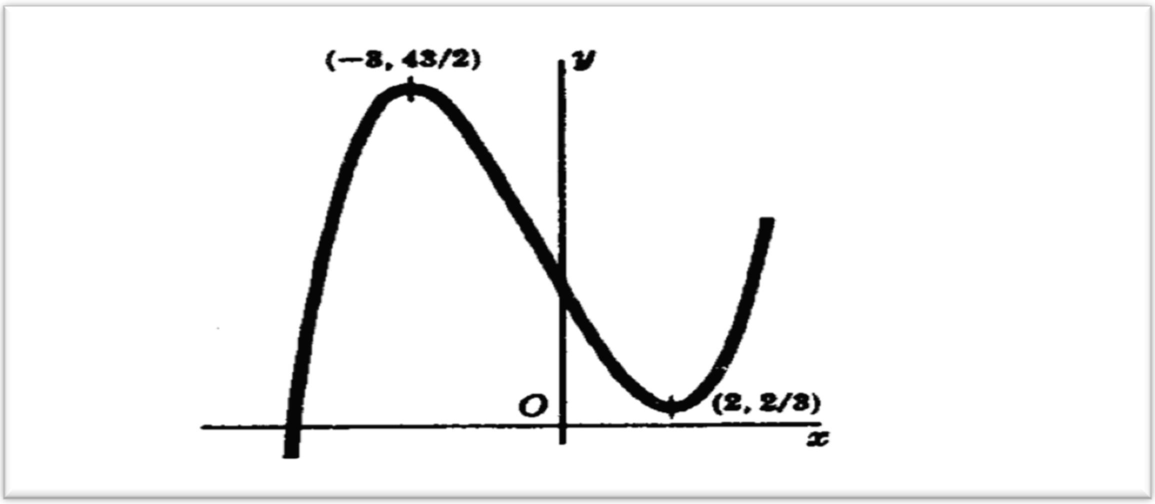
2 –

عندما تكون y' موجبة ، تكون y متزايدة وعندما تكون y' سالبة تكون y متناقصية .

عند $x < -3$ مثلاً $x = -4$ ، $y' = (-1)(-6) = +$ و y متزايدة .

عند $-3 < x < 2$ مثلاً $x = 0$ ، $y' = (3)(-2) = -$ و y متناقصية .

عند $x > 2$ مثلاً $x = 3$ ، $y' = (6)(1) = +$ و y متزايدة .



النقاط العظمى والصغرى

في الرياضيات النقاط العظمى والصغرى تعرف عموماً بالنقاط الحرجة هي تلك النقاط التي عندها قيمة الدالة اعلى ما يمكن او ادنى ما يمكن ضمن جوار معرف (منحني حرج) او على نطاق الدالة بشكل عام ، تعرف النقاط العظمى والصغرى من نظرية المجموعات بأنها اعلى واقل قيم بالمجموعة.

يستخدم اختبار المشتقة للدالة لايجاد النقاط الحرجة وتحديد اذا كانت اي من هذه النقاط تمثل القيم العظمى والصغرى ويمكن لاختبار المشتقة ان يعطي معلومات عن تقعر الدالة .

اختبار المشتقة الاولى : يمكن ان تعطيك معلومات عن التقعر ونقاط الانقلاب.

اختبار المشتقة الثانية : بعد ايجاد النقاط الحرجة للدالة ، يستخدم اختبار المشتقة الثانية قيمة المشتق الثاني في تلك النقاط لتحديد ما اذا كانت هذه النقاط هي القيم القصوى المحلية

اوالصغرى المحلية اذا كانت الدالة f مختلفة مرتين عند النقطة الحرجة x فأن :

- اذا كانت $f''(x) < 0$ فأن الدالة لديها قيمة عظمى محلية عند x.
- اذا كانت $f''(x) > 0$ فأن الدالة لديها قيمة صغرى محلية عند x.
- اذا كانت الدالة $f''(x) = 0$ فلا يمكن الحكم على الدالة .

مثال : نقوم بتطبيق اختبار المشتقات العام على الدالة $f(x) = x^6 + 5$ عند النقطة $x = 0$ لكي نقوم بذلك يجب ان نحسب مشتقات الدالة ونعوضها في النقطة التي نهتم بها حتى نحصل على نتيجة غير صفرية $f'(x) = 6x^5$, $f'(0) = 0$

$$F''(0) = 0 , f''(x) = 30x^4$$

$$f^{(3)}(0) = 0 , f^{(3)}(x) = 120x^3$$

$$F^{(4)}(0) = 0 , f^{(4)}(x) = 360x^2$$

$$F^{(5)}(0) = 0 , f^{(5)}(x) = 720x$$

$$f^{(6)} = 720$$

كما هو واضح اعلاه عند النقطة $x = 0$، الدالة x6 +5 لديها كل المشتقات تساوي صفر عند النقطة $x = 0$ ما عدا المشتقة من الدرجة السادسة وهي قيمة موجبة وبالتالي فأن $n = 6$ بالاختبار لديها قيمة صغرى محلية عند الصفر .

نقطة الانقلاب او نقطة الانعطاف : هي نقطة واقعة على منحني ، يحدث عندها تغير في اشارة الانحناء اي ان المنحني يتغير من كونه محدباً الى اعلى (انحناء موجب) ويصير محدباً الى اسفل (انحناء سالب) او العكس .

النهايات الـعـظمـى والـصـغرى للـدوال

يـمكن الـتـمييز بين الـنـهايات الـعظمى والـصـغرى للـدوال بالـطرق الــتالية:

اولاً : أحـصل على المـشـتقتين الأولى $\frac{dy}{dx}$ ، والثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$

ثانيا: ضع $\frac{dy}{dx}=0$ ، وحـل الـمعادلة لتحصل على القيم الحرجة، وغالبا ما تكون عندنا قيمة واحدة حرجة.

ثالثا: إذا كانت $\frac{d^2y}{dx^2}$ سالبة تكون للدالة نـهاية عظمى عند القيمة الحرجة. أما إذا كانت $\frac{d^2y}{dx^2}$ موجبة تكون للدالة نـهاية صغرى عند القيمة الحرجة.

مع ملاحظة أنه يطلق على نقط النهايات العظمى والصغرى اسم " نقط الرجوع".

كما قد لا تكون للدالة نـهاية عظمى أو صغرى عند النقطة التي تكون فيها $\frac{dy}{dx}=0$.

ويحدث عندما $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ تكون لدينا نقطة انقلاب .

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص ونقط النهايات العظمى اوالصغرى المحلية ان وجدت للدلة التالية :

$$f(x) = 1 + (x-2)^2$$

الحل :

$F'(x) = 2(x-2)$

$F'(x) = 0 \longrightarrow 2(x-2) = 0 \longrightarrow X - 2 = 0 \;,\; X = 2$

$F(2) = 1 + (2-2)^2 = 1 \longrightarrow (2, 1)$

عندما $x > 2$ ، $f'(3) = 2(3-2) = 2$ ، $f'(x)$ موجبة

عندما $x < 2$ ، $f'(1) = 2(1 – 2) = -2$ ، $f'(x)$ سالبة

النقطة $(2,1)$ نهاية صغرى محلية

مناطق التزايد = $\{x : x \in R , x > 2\}$

مناطق التناقص = $\{x : x \in R , x < 2\}$

اختبار التقعر : الاستخدام المرتبط والمتميز للمشتقات الثانية هو تحديد ما اذاكانت دالة مقعرة لاعلى او مقعرة للاسفل في نقطة ما ومع ذلك فأنه لا يوفر معلومات حول نقاط الانعطاف .

التقعر : يسمى قوس من منحني $y = f(x)$ بالمقعر لاعلى لو كان القوس عند كل نقطة يقع فوق مماس هذه النقطة . كلما زادت x ، يزداد ميل $f'(x)$ لذلك $f''(x) > 0$.

يسمى القوس من المنحني $y = f(x)$ بالمقعر لاسفل اذاكانت كل نقط القوس تقع اسفل المماس لهذه النقطة . فأن الميل يقل و $f''(x) < 0$.

مثال : لتكن الدالة f معرفة $f(x) = x^3 – 3x^2 + 2x + 1$ اوجد تقعر اجزاء مختلفة من الرسم البياني ، اوجد ايضاً نقاط الانقلاب .

الحل :

$F'(x) = 3x^2 – 6x + 2$

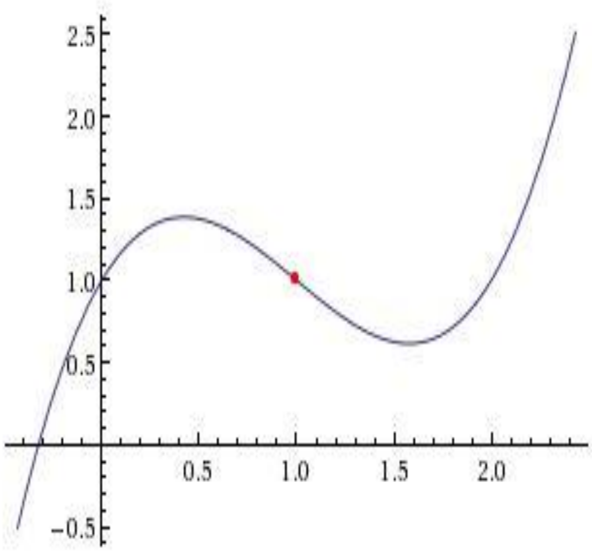
$F''(x) = 6x – 6$

$F''(x) = 0 , \quad 6x – 6 = 0 , \ x = 1$

عندما $x > 1$ ، مثلاً $x = 2$, $f''(2) = 6$, $f''(x) > 0$ ، فأن المنحني مقعر الى اعلى $x > 1$.

عندما $x < 1$ ، مثلاً $x = 0$, $f''(0) = - 6$, $f''(x) < 0$ فأن الرسم البياني مقعر للاسفل $x < 1$.

نظراً التقعر معاكس عند $x > 1$ ، $x < 1$ يتغير التقعر عند النقطة التي يكون فيها $x= 1$.



يمكننا ان نستنتج انه يمكن الحصول على نقطة انقلاب عندما $f''(x) = 0$ وهو شرط ضروري لانقلاب النقاط .

$$f(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 2(1) + 1$$

$$f(1) = 1$$

$(1 , 1)$ هي نقطة انقلاب

تعريف التكامل

هو العملية العكسية للتفاضل، بحيث تستخدم التكاملات في الرياضيات لإيجاد العديد من الكميات مثل: المساحات، والأحجام، والإزاحة ، وما إلى ذلك.
عندما نتحدث عن التكاملات ، فإنها ترتبط عادةً بالتكاملات المحددة و تستخدم التكاملات غير المحددة للمشتقات العكسية.

أنواع التكامل

هناك نوعان من أشكال التكاملات وهما:

التكاملات غير المحدودة:

هي تكامل دالة عندما لا يوجد حد للتكامل، أي أن الفترة مفتوحة في هذه العملية، وفي هذا النوع بالتحديد من التكاملات، بعكس التكامل المحدود، وكذلك ما يميزها هو وجود ثابت في العملية.

التكاملات المحدودة:

تكامل دالة ذات حدود تكامل، فيكون هناك قيمتان كحدود لفترة التكامل، أحدهما هو الحد الأدنى، والآخر هو الحد الأعلى ولا يحتوي على أي ثابت للتكامل، كما التكامل غير المحدود.

خواص التكامل غير المحدد

- $\int 1 \; dx = x + c$
- $\int x^n \; dx = x^{n+1} / n + 1 + c$
- $\int a \; dx = ax + c$
- $\int f(x)\,dx = F(x) + C$
- $\int pf(x)\,dx = p\int f(x)\,dx$
- $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx,$

مثال : جد قيمة التكامل التالي $\int 6x^5 - 18x^2 + 7 \; dx$

الحل :

$\int 6x^5 - 18x^2 + 7 \; dx = 6(x^6/6) - 18\,(x^3/3) + 7x + C$

$\int 6x^5 - 18x^2 + 7 \; dx = x^6 - 6x^3 + 7x + C$

مثال : جد تكامل الدالة التالية $f(x) = 6x^8 - 20x^4 + x^2 + 9$

الحل :

$\int f(x)\,dx = \int [6x^8 - 20x^4 + x^2 + 9]\,dx$

$f(x) = (2/3)x^9 - 4x^5 + (1/3)x^3 + 9x + C$

مثال : جد قيمة التكامل التالي

$$\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$$

مثال : جد قيمة التكامل التالي

$$\int \frac{1}{(2x-7)^6}.dx = \int (2x-7)^{-6}.dx = \frac{1}{2}\int 2((2x-7)^{-6}.dx$$

$$= \frac{(2x-7)^{-6+1}}{2(-6+1)} + c = \frac{-1}{10(2x-7)^5} + c$$

مثال : جد قيمة التكامل التالي

$$\int (x+1)(x-2)\,dx = \int (x^2 + x - 2x - 2)dx = \int (x^2 - x - 2)dx$$

$$= \int x^2 dx - \int x dx - 2\int dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$$