وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المعهد التقني / السماوة

قسم تكنولوجيا المعلومات والاتصالات

اسم المادة : رياضيات

اسم مدرسة المادة :م .م لقاء طارق هادي

- تطبيقات المشتقة
- معادلة المستقيم المماس والعمود على المماس
- المشتقات من المراتب العالية

تطبيقات المشتقة

تطبيقات المشتقة تستخدم $v(t) = s'(t)$ ، $a(t) = v'(t)$

حيث :

s : المسافة (m) Meter

v : السرعة (m/s)

a: التعجيل (التسارع) (m/s^2)

مثال : يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة $s(t) = \frac{1}{3} t^3 - 3t^2 + 9t + 15$ حيث s بالامتار ، t بالثانية ، اوجد سرعة الجسيم عندما يكون التسارع هو $4\ m / sec^2$.

الحل :

$$V = s'(t) = t^2 - 6t + 9$$

$$a(t) = v'(t) = 2t - 6$$

$$4 = 2t - 6$$

$$2t = 10 \longrightarrow t = 5$$

$$V(5) = (5)^2 - 6(5) + 9 = 25 - 30 + 9 = 4\ m/\ sec$$

معادلة المستقيم المماس والعمود على المماس

معادلة المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (x_1, y_1) هي

$$(y - y_1) = f`(x)(x - x_1)$$

حيث $m = f`(x)$

ومعادلة العمودي

$$(y - y_1) = \frac{-1}{f`(x)}(x - x_1) \quad : f`(x) \neq 0$$

مثال (1) : أوجد معادلة المستقيم المماس والمستقيم العمودي على منحنى الدالة $y = \sin x$ عند النقطة $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dsinx}{dx} = cosx$$

$$\boldsymbol{cosx} \mid_{x=\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

وعليه فإن ميل المماس لمنحنى الدالة هو $\boldsymbol{m = \frac{1}{2}}$

ميل المستقيم العمودي : $\boldsymbol{m_1 = \frac{-1}{m} = -2}$

معادلة المماس لمنحنى الدالة عند النقطة $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ هي :

$$\boldsymbol{y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

ومعادلة العمود على منحنى الدالة عند النقطة $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ هي :

$$\boldsymbol{y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow y = -2x + \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

مثال : اوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحني الدالة $y = tanx$ عند النقطة $\boldsymbol{p\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)}$

الحل :

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(tanx) = sec^2 x}$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx} \mid_{x=\frac{\pi}{4}} = sec^2 \frac{\pi}{4} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2}$$

عليه ميل المستقيم العمودي للمنحى عند $p\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

$$m_1 = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{2}$$

معادلة المستقيم العمودي :

$$y - 1 = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$$

الـــــمشتقات الـــــعليا:

غالباً ما تكون المشتقة الأولى *First Derivatives* $\frac{dy}{dx}$ للـــدالة $y = f(x)$ ، هي أيضا دالة أخرى للمتغير x. وفي هذه الحالة يمكن أن نجري عملية التفاضل على المشتقة الأولى ونحصل على ما يسمى بالمشتقة الثانية *Second Derivatives*. بالمثل إذا كانت المشتقة الثانية هي أيضا دالة للمتغير x، فإنه يمكن الحصول منها على المشتقة الثالثة وهكذا.

وعادة نرمز إلى المشتقات الأولى والثانية والثالثة والرابعة...الخ، بواحدة من الطرق التالية:

الطريقة الأولى: $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}$

الطريقة الثانية: y', y'', y'''

الطريقة الثالثة: $f'(x), f''(x), f'''(x)$

مثال : جد المشتقات الاربع للدالة التالية $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 10x - 5$

الحل :

$f'(x) = 15x^2 - 6x + 10$

$f''(x) = 30x - 6$

$f'''(x) = 30$

$f''''(x) = 0$

مثال : - جد المشتقات الثلاث للدالة التالية $f(x) = \sin(3x) + e^{-2x} + \ln(7x)$

الحل :

$$f'(y) = 3\cos(3x) - 2e^{-2x} + \frac{7}{7x} = 3\cos(3x) - 2e^{-2x} + x^{-1}$$

$$f''(x) = -9\sin(3x) + 4e^{-2x} - x^{-2}$$

$$f'''(x) = -27\cos(3x) - 8e^{-2x} + 2x^{-3}$$

$$= -27\cos(3x) - 8e^{-2x} + 2 / x^{3}$$

تمارين

تمرين : اوجد مشتقة الدالة التالية:

$$y = Ln \ sin \ x$$

الحـل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x}\cos x \qquad = \cot x$$

تمرين : جد مشتقة الدالة التالية $x^2 \tan(y) + y^{10} \sec(x) = 2x$

الحل :

$$2x \tan(y) + x^2 \sec^2(y)y' + 10y^9 y' \sec(x) + y^{10} \sec(x) \tan(x) = 2$$

$$y'(x^2 \sec^2(y) + 10y^9 \sec(x)) = 2 - y^{10} \sec(x) \tan(x) - 2x \tan(y)$$

$$y' = (2 - y^{10} \sec(x) \tan(x) - 2x \tan(y)) / (x^2 \sec^2(y) + 10y^9 \sec(x))$$

تمرين : موضع جسيم بعد t ثانية من رؤيته هو $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ اوجد تعجيل الجسم (التسارع) في كل مرة تكون السرعة تساوي صفر .

الحل : $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$

$$v = 0$$

$3t^2 - 12t + 9 = 0$ بالقسمة على 3

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t - 3)(t - 1) = 0 \longrightarrow t = 3 , t = 1$$

الجسيم يتوقف عند $t = 3 , t = 1$

$$A(t) = v'(t) = 6t - 12$$

$$a(3) = 6(3) - 12 = 6 \ m/sec^2$$

$$a(1) = 6(1) - 12 = -6 \ m/sec^2$$