وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المعهد التقني / السماوة

قسم تكنولوجيا المعلومات والاتصالات

اسم المادة : رياضيات

مدرسة المادة : م .م لقاء طارق هادي

- اشتقاق الدوال المثلثية
- اشتقاق الدوال الاسية
- اشتقاق الدوال الزائدية
- الاشتقاق الضمني
- اشتقاق الدوال اللوغاريتمية

الدوال المثلثية

في الرياضيات ، الدوال المثلثية هي دوال ترتبط بالزاوية، وهي مهمة في دراسة المثلثات وتمثيل الظواهر المتكررة (كالموجات). ويمكن تعريف الدوال المثلثية على أنها نسب بين ضلعين في مثلث قائم الزاوية ، ويكون مجموع زوايا المثلث 180 درجة دائما.

اشتقاق الدوال المثلثية

$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$	$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$	$\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$	$\frac{d}{dx}\cot u = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$	$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot$	$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$

مثال : جد مشتقات الدوال التالية

$$(a) \quad f(x) = tanx + cotx$$

الحل :

$$\frac{d}{dx}f(x) = sec^2x + (-csc^2x)$$

$$= sec^2x - csc^2x$$

$$(b)\quad g(x) = secx \cdot (1 + sinx)$$

الحل :

$$\frac{d}{dx} g(x) = secx \cdot \ \frac{d}{dx}(1 + sinx) \ + \frac{d}{dx} secx \ \cdot (1 + sinx)$$

$$= secx \cdot \ cosx + (secx \cdot tanx) \ \cdot (1 + sinx)$$

$$= secx \cdot \ cosx + \ secx \cdot tanx \ + secx \cdot tanx \cdot sinx$$

$$(c) h(x) = cscx + sinx \cdot tanx$$

الحل :

$$\frac{d}{dx} h(x) = \frac{d}{dx} cscx + \frac{d}{dx} \ (sinx \cdot tanx)$$

$$= -cscx \cdot cotx + tanx \cdot cosx + sec^2 x \cdot sinx$$

مثال : اوجد المشتقة التالية

$$g(x) = \frac{x}{cosx}$$

الحل :

$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{\frac{d}{dx} x \cdot cosx - x \cdot \frac{d}{dx} cosx}{cos^2 x}$$

$$= \frac{1 \cdot cosx + x \cdot sinx}{cos^2 x} = \frac{cosx + x \cdot sinx}{cos^2 x}$$

الدوال الاسية

يقال للدالة f (x) المعرفة والمتصلة على مجال الاعداد الحقيقية R انها دالة اسية عادية اساسها هو العدد b ، اذا كانت تاخذ الصورة الرياضية

$F(x) = b^x \quad x, b \in R$

حيث b ≠1 هو عدد حقيقي موجب. تعمل الدوال الاسية على وضع القيمة العددية للرقم دون تكراره لأكثر من مرة ، حيث يتم ضرب الرقم في الاس الظاهر فوقه من اجل تحديد القيمة العددية لهذا الرقم ، كما تعمل على ايجاد القيمة التي توضح قيمة العدد الناتج من معادلة ما .

اشتقاق الدوال الاسية

Derivatives of Exponential Functions

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad \frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

مثال : جد مشتقة الدالة التالية $y = e^{\sin x}$

الحل :

$$\frac{d}{dx}(e^{\sin x}) = e^{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x) = e^{\sin x}\cos x$$

مثال : جد مشتقة الدالة التالية $y = e^{-3x}\sin 4x$

الحل :

$$\frac{d}{dx}(e^{-3x}\sin 4x) = e^{-3x}\frac{d}{dx}\sin 4x + (\sin 4x)\frac{d}{dx}e^{-3x}$$

$$= e^{-3x}(\cos 4x)(4) + (\sin 4x)e^{-3x}(-3)$$

$$= e^{-3x}(4\cos 4x - 3\sin 4x)$$

مثال : جد مشتقة الدالة التالية $y = x^3 + 3^x$

الحل :

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 3^x) = 3x^2 + 3^x(\ln 3)$$

الدوال الزائدية

هي تلك الدوال المماثلة للدوال المثلثية ، لكنها معرفة بواسطة القطع الزائد بدلا من الدائرة وهي تعتبر مشابهة للدوال المثلثية من حيث الخواص والرموز .

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$$

اشتقاق الدوال الزائدية

$$\frac{d}{dx}[\sinh(f(x))] = \cosh(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{csch}(f(x))] = -\operatorname{csch}(f(x))\coth(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\cosh(f(x))] = \sinh(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sech}(f(x))] = -\operatorname{sech}(f(x))\tanh(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\tanh(f(x))] = \operatorname{sech}^2(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\coth(f(x))] = -\operatorname{csch}^2(f(x)) \cdot f'(x)$$

مثال : جد مشتقة الدالة التالية $f(x) = \sinh(x^2)$

الحل :

$$f'(x) = 2x \cosh(x^2)$$

مثال : جد مشتقة الدالة التالية $f(x) = 2\sinh x + 4\cosh x$

الحل :

$$f'(x) = 2\cosh x + 4\sinh x$$

مثال : جد مشتقة الدالة التالية $f(x) = \cosh x / \sinh(x^2)$

الحل :

$$f'(x) = [\, h(x)\, g'(x) - g(x)\, h'(x)\,] / h(x)^2$$

$$= [\, (\sinh x^2)(\sinh x) - (\cosh x)(2x \cosh x^2)\,] / (\sinh x^2)^2$$

الدالة الضمنية

الدالة الضمنية : هي دالة رياضية تمثل اقتراناً ضمنياً ، وتكون الدالة ضمنية اذا كان المتغير التابع والمستقل (المجال والمجال المقابل) في طرف واحد من المعادلة (كان الاقتران ضمنياً) مثل $3x^2 + 2xy + y^2 + 7 = 0$

مثال : جد مشتقة الدالة التالية $x^3y^5 + 3x = 8y^3 + 1$

الحل :

$$3x^2y^5 + 5x^3y^4y' + 3 = 24y^2y'$$

$3x^2y^5 + 3 = 24y^2y' - 5x^3y^4y'$

$3x^2y^5 + 3 = y' (24y^2 - 5x^3y^4)$

$y' = (3x^2y^5 + 3)/(24y^2 - 5x^3y^4)$

مثال : جد مشتقة الدالة التالية $x\, y = 1$

الحل : $x \dfrac{dy}{dx} + y = 0$

$$x \frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = y' = (\frac{-1}{x}) / x$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = y' = (-1/x^2)$$

الدوال اللوغاريتمية

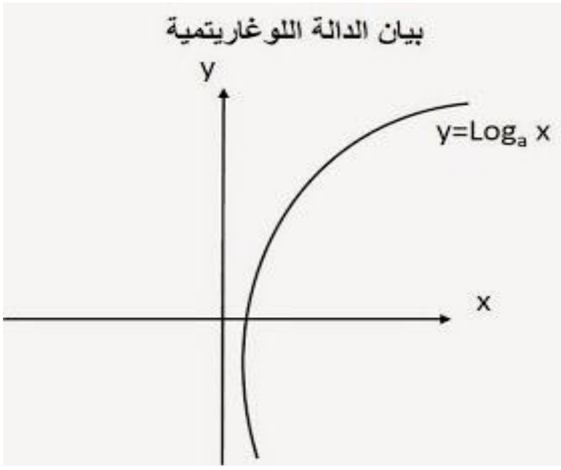
هي الدالة العكسية للدوال الاسية ويعرف لوغاريتم عدد ما بالنسبة لاساس ما بأنه الاس المرفوع على الاساس والذي سينتج العدد فعلى سبيل المثال لوغاريتم 1000 بالنسبة للاساس 10 هو 3 لان

$1000 = 10x10x10 = 10^3$ وعموماً يمكن القول انه اذا كان $x = b^y$ فأن لوغاريتم x بالنسبة للاساس b هو y يعبر عن ذلك رياضياً بالعلاقة :

$$\mathrm{Log}_b\, x = y$$

والرجوع الى المثال يصبح : $\log_{10}(1000) = 3$

يسمى اللوغاريتم طبيعيا إذا كان للأساس (e) ويرمز للوغاريتم الطبيعي بالرمز *Log x* دون ذكر للأساس أو بالرمز *Ln x* .



خاصية الضرب في اللوغاريتمات

مفهوم أساسي — **خاصية الضرب في اللوغاريتمات**

التعبير اللفظي: لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

الرموز: إذا كانت a, b, x أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $x \neq 1$ فإن
$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$.

مثال: $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

مفهوم أساسي — **خاصية القسمة في اللوغاريتمات**

التعبير اللفظي: لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحًا منه لوغاريتم المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت a, b, x أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $x \neq 1$ فإن

$$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

مثال: $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

خاصية لوغاريتم القوة

مفهوم أساسي خاصية لوغاريتم القوة

التعبير اللفظي: لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

الرموز: لأي عدد حقيقي p وأي عددين موجبين m, b، حيث $b \neq 1$ فإن

$\log_b m^p = p \log_b m$

مثال: $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

اشتقاق الدوال اللوغاريتمية

إذا كانت الدالة لوغاريتمية طبيعية للأساس (e) تكون المشتقة هي :

$$\frac{d}{d\,x}(\operatorname{Ln}\ x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\ln\left[f(x)\right] = \frac{1}{f(x)}\ f'(x)$$

وبالنسبة للدالة اللوغاريتمية لأي أساس (a) تكون:

$$\frac{d}{d\,x}(\operatorname{Log}_a u) = \frac{1}{u}\ \frac{d\,u}{d\,x}\ \operatorname{Log}_a\ e$$

مثال : **اوجد مشتقة الدالة :** ***$y = Log_a (x^2 + 2)$***

الحـــل

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{x^2+2}\ \frac{d}{d\,x}\left(x^2+2\right)\ \operatorname{Log}_a\ e = \frac{2\,x\ \operatorname{Log}_a\ e}{x^2+2}$$

مثال : اوجد مشتقة الدالة $y = \mathrm{Ln}\, x^3 \left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}$

الحل :

يمكن كتابة المعادلة على الصورة الأبسط بأخذ اللوغاريتم أولا :

$$y = 3\,\mathrm{Ln}\, x + \frac{5}{2}\mathrm{Ln}\left(x^2+1\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{x} + \frac{5}{2\left(x^2+1\right)}2x = \frac{3}{x} + \frac{5x}{x^2+1} = \frac{8x^2+3}{x\left(x^2+1\right)}$$

مثال : اوجد مشتقة الدالة التالية

$$\ln \frac{x}{3x-4}$$

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{x}{3x-4} = \frac{d}{dx}[\ln x - \ln(3x-4)]$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{3x-4}\,.3$$

$$= \frac{3x-4-3x}{x(3x-4)} = -\frac{4}{x(3x-4)}$$

تمارين

مثال : جد مشتقة الدالة التالية $\mathbf{f(x) = 5x^2 + x^3 - 7x^4}$

الحل :

$$f(x) = (5x^2 + x^3 - 7x^4)$$

$$f'(x) = = 5 \times 2x + 3x^2 - 7 \times 4x^3$$

$$f'(x) = 10x + 3x^2 - 28x^3$$

اشتق كلاً من الدوال الآتية:

$$1.\ y = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 9x^5$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + 2(1) - 3(2x) - 5(3x^2) - 8(4x^3) + 9(5x^4)$$

$$= 2 - 6x - 15x^2 - 32x^3 + 45x^4 \quad \blacksquare$$

$$2.\ y = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

$$y = x^{-1} + 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} + 3(-2x^{-3}) + 2(-3x^{-4})$$

$$= -x^{-2} - 6x^{-3} - 6x^{-4}$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4} \quad \blacksquare$$

مثال : اوجد المشتقة التالية

$$g(x) = secx + cscx$$

الحل :

$$\frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}secx + \frac{d}{dx}cscx$$

$$= secx\,tanx - cscx\,cotx$$

مثال : اوجد المشتقة التالية

$$(3x+\sin(x)-4\cos(x))' = (3x)' + (\sin x)' - (4\cos x)' =$$

$$= 3x' + \cos x - 4(\cos x)' =$$

$$= 3\cdot 1 + \cos x - 4\cdot(-\sin x) =$$

$$= 3 + \cos x + 4\sin x$$