وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المعهد التقني / السماوة

قسم تكنولوجيا المعلومات والاتصالات

اسم المادة : رياضيات

اسم المدرسة : م .م لقاء طارق هادي

- المتسلسلات
- المتسلسلة الحسابية
- المتسلسلة الهندسية
- الدالة
- التفاضل
- المشتقات

المتسلسلات

المتسلسلة (Series): هي مجموع لمتتالية من الحدود حيث تكون هذه الحدود اعداداً او دالات

$$Sn = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + an = \sum ak$$

يتم توليد حدود المتسلسلة عادة من خلال قاعدة معينة او صيغة رياضية او خوارزمية او تعاقب من القياسات او حتى بواسطة توليد الاعداد العشوائية مثلاً . عندما يكون هناك حدود لا نهائية على عكس المجاميع المنتهية ، تحتاج المتسلسلات لفهم وتخطيط بعض ادوات التحليل الرياضي.

المتسلسلات ورمز المجموع SERIES AND SIGMA NOTATION

عرفنا فيما سبق أن المتتالية هي مجموعة مرتبة من الأعداد الحقيقية وفق قاعدة معينة ويفصل بين حدودها الإشارة ((،)) ولكن إذا استبدلنا إشارة ((،)) بإشارة الجمع ((+)) فإن المتتالية تسمى متسلسلة فمثلا: فيسمى 8,5,2.... متتالية أما المجموع :2+5+8+...... متسلسلة وللتعبير عن هذا المجموع نستخدم رمزا خاصا يسمى∑ (ويقرأ سيجما).

المتسلسلة الحسابية Arithmetic Series :

المتسلسلة الحسابية هي متوالية حسابية وضع بين حدودها إشارة المجموع مثلاً : المتتالية الحسابية 9,7,5,3,1,.....الخ تصبح متسلسلة إذا كتبناها على شكل مجموع 1+3+5+7+9+.....الخ .

إذن بتعبير آخر المتسلسلة الحسابية هي مجموع حدود المتوالية الحسابية .

لكتابة المجموع يستخدم الرياضيون الحرف اليوناني ∑ سيجما .

مثال :

ميز المتتاليات أو المتسلسلات الحسابية من غيرها فيما يلي:

1) 3 ، 5 ، 7 ، . . . ،31

2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{20}$

3) (متتالية الأعداد الأولية)

4) $\sum_{r=1}^{10}(r+7)$

الحل:

1) المتتالية 3 ,7,5....,31 حسابية لأن اساسها ثابت حيث 2 =5-3, 7-5=2

2) المتسلسلة $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{20}$ ليست حسابية لأن أساسها غير ثابت حيث $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}-1$ بينما $-\frac{1}{6} = \frac{1}{3}-\frac{1}{2}$

3) متتالية الاعداد الاولية : 2,3,5,7..... ليست حسابية لأن 1 = 3-2
بينما 2 = 5-3 فأساسها غير ثابت.

4) $\sum(r+7) = (1+7)+(2+7)+(3+7)+(4+7)+..+(10+7)$

$= 8+9+10 +...... + 17$

فهي متسلسلة حسابية لأن أساسها ثابت حيث 1 = 8-9 = 9-10

المتسلسلة الحسابية Arithmetic Series :

إيجاد مجموع متسلسلة حسابية :

لايجاد مجموع المتسلسلة 1+3+5.... حتى الحد العشرون ، يمكن متابعة بقية الحدود والجمع المباشر ، ولكن هذه الطريقة غير عملية لمتتاليات معقدة وكبيرة للتعرف على طريقة إيجاد المجموع:

. ما الحد الأول لهذه المتسلسلة ؟

. ما أساس هذه المتسلسلة ؟

. ما الحد العام لهذه المتسلسلة ؟

مثال : ما مجموع المتسلسلة 1+3+5... حتى 20 حداً ؟

الحل :

يمكن أن نكتب المتسلسلة حتى الحد العشرين 1+3+5+7+9...39.

ويمكن أن نكتبها معكوسة من الحد العشرين إلى الحد الأول كما يلي:
39+37+35+33+31.... والآن لنكتب المتسلسلة المكونة من عشرين حداً
ومعكوسها لنرمز للمجموع بالرمز S= 1+3+5+7+9.......39
S= 39+37+35+33+31+.......1

أي أن مجموع المتتالية (Sn) =(الحد الأول + الحد الأخير) × نصف عدد الحدود

$$Sn = \frac{n}{2} \times (a_n + a_1)$$

وفي حالتنا هذه :

$$Sn = \frac{20}{2} \times (39 + 1)$$

$$= 10 \times 40 = 400$$

مثال

أوجد مجموع حدود المتسلسلة المرتبطة بالمتوالية الحسابية 5, 12 , 19..... حتى 51 حداً .

الحل :

ما الحد الأول للمتوالية ؟ $a = 5$

ما أساس المتوالية ؟ $d = 7$

ما الحد العام للمتوالية ؟

الحد العام

$$u_n = a + (n-1)d$$
$$= 5 + (n-1)\,7$$
$$= 5 + 7n - 7$$
$$= 7n - 2$$

ما الحد الحادي والخمسون لها ؟

$$= (7 \times 51) - 2$$
$$355 = 357 - 2$$

$$S = \frac{51}{2} \times (355 + 5)$$
$$= 9180$$

الحد العام للمتتالية الحسابية:

لنأخذ المتتالية الحسابية 27,23,19,15,11,7,3 ، التي أساسها 4 ونلاحظ النمط التالي:

الحد الثاني $u2 = 3+4x(2-1) = 3+4x1 = 7$

الحد الثالث $u3 = 3+4x(3-1) = 3+4x2 = 11$

.

.

الحد السابع $u7 = 3+4 x (7-1) = 3+4 x 6 = 27$

لاحظ ان كل حد = (الحد الاول) + (رتبة الحد - 1) x الاساس

$$an=a+ (n-1) d$$

مثال :

أوجد الحد الخامس في المتتالية 12,7, 2 والتي اساسها 5.

الحل :

$$2= a ،5 = d$$

$$un=a+(n - 1) d$$

$$u5=2+(5 - 1) \times 5$$

$$u= 2+ 4\times 5=22$$

تعريف المتسلسلة الهندسية

المتسلسلة الهندسية في الرياضيات هي سلسلة ذات نسبة ثابتة بين حدود المتتالية و بشكل أوضح تكون المتسلسلة الهندسية هي قائمة مرتبة من الأرقام يكون فيها كل حد هو نتاج الحد السابق ومضاعف ثابت غير صفري يسمى العامل المشترك.

الحد النوني في المتسلسلة الهندسية يساوي $an = a_1.r^{n-1}$

المتسلسلة الهندسية هي واحدة من أبسط الأمثلة على السلاسل اللانهائية ذات المجاميع المحدودة.

المتتاليات و المتسلسلات الهندسية
GEOMETRIC SEQUENCE AND SERIES

الحد العام للمتتالية الهندسية.

مثال:

ما ترتيب الحد الذي قيمته 1215 من حدود المتتالية الهندسية : 5,15,45,..... ؟

الحل:

$a = 5$ ، $r = 3$ نفرض أن الحد الذي قيمته 1215 هو u_n

$1215 = ar^{n-1} = u_n$

بالقسمة على (5) $1215 = 5\times 3^{n-1}$

اذن $243 = 3^{n-1} \leftarrow 3^5 = 3^{n-1}$

لأنه إذا تساوت الأساسات تساوت الأسس $n - 1 = 5$

$n = 6$

الحد الذي قيمته 1215 هو الحد السادس

مجموع المتسلسلة الهندسية SUM OF GEOMETRIC SERIES:

إننا لا نستطيع تطبيق القاعدة المذكورة أعلاه لاحظ أنه إذا كانت $r = 1$ المتسلسلة الهندسية تصبح:

$$a + a + a + \ldots = \sum a = an$$

اما اذا كان $r\neq 1$ فأن مجموع المتسلسلة الهندسية هو $S_n = (a_1 - a_1.r^n)/ 1-r$

مثال: أوجد مجموع الحدود الستة الأولى من حدود المتسلسلة الهندسية :

$3+6 + 12+.......$

الحل:

$a =3$، $r = 2$

$$S = (3-3\times 2^6) / 1 - 2 = 3 (1 - 64) / -1 = 3 \times 63 = 189$$

مثال :اوجد مجموع الحدود الاربعة الاولى من حدود المسلسلة الهندسية التالية

$$5 + 25 + 125 + 625 + \ldots$$

الحل:

يمكن حساب المجموع باعتبار المتسلسلة متسلسلة هندسية حدها الأول 5 وأساسها 5 فيكون مجموعها هو

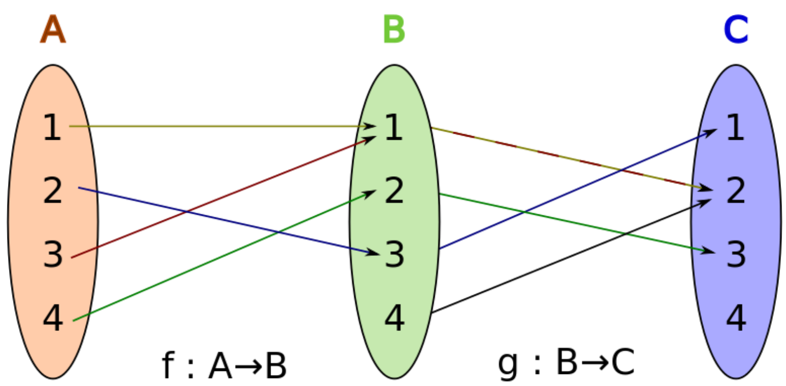
$$S= 5\,(1 - 5^{4}) / 1 - 5 = 5 \times 624 / 4 = 5 \times 156 = 780$$

تعريف الدالة

هي علاقة تربط (f) حيث f دالة من المجموعة A إلى المجموعة B ، A هي (المنطلق) او مجال الدالة و B هي (المستقر) او المجال المقابل حيث يتم تعيين كل عنصر من عناصر المجموعة "A" مع عنصر واحد فقط ينتمي الى المجموعة " B" .

لا يمكن لعنصر من مجموعة المنطلق A ان يرتبط الا بعنصر وحيد من مجموعة المستقر B .

يمكن لعنصر من مجموعة المستقر B ان يرتبط بعنصر واحد او اكثر من مجموعة المنطلق .



الدوال الجبرية

تُعرف الدالة التي تتكون من عدد محدود من المصطلحات التي تتضمن قوى x والعمليات الأساسية مثل الجمع والطرح والضرب والقسمة باسم معادلة جبرية أو الدالة الجبرية.

$f(x)=x^2+3x+6$

الدالة الثابتة

يقال للدالة f بأنها داله ثابتة إذا كان مداها مكون من عدد ثابت c أي أن قاعدة تعريفها هي :

$f(x)=c$ حيث $c \in R$.

الدوال كثيرة الحدود

تتكون الدالة المتعددة الحدود من واحد أو أكثر من المتغيرات والمعاملات، يتم بناءها من خلال عمليات الطرح او الجمع أو الضرب أو القسمة بحيث يكون الاس صحيحا لا سالباً.

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

التفاضل

يعبر التفاضل عن المعدل الذي تتغير به قيمه y نتيجة تغير قيمة x توجد بينهما علاقة رياضية او دالة رياضية .

المشتقة

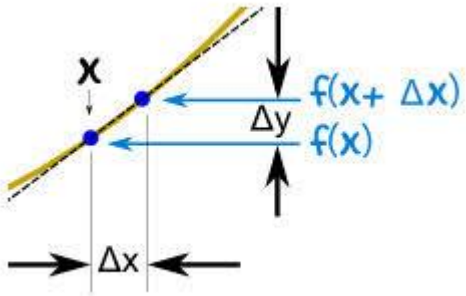
تعرف المشتقة بأنها ميل المماس لمنحني f(x) عند اي نقطة بشرط وجود هذه المشتقة او هي السرعة اللحظية للدالة . نستخدم الرمز Δ للدلالة على التغير في الكمية . ويكون معدل التغير

هو نهاية نسبة تغير y الى نسبة تغير x

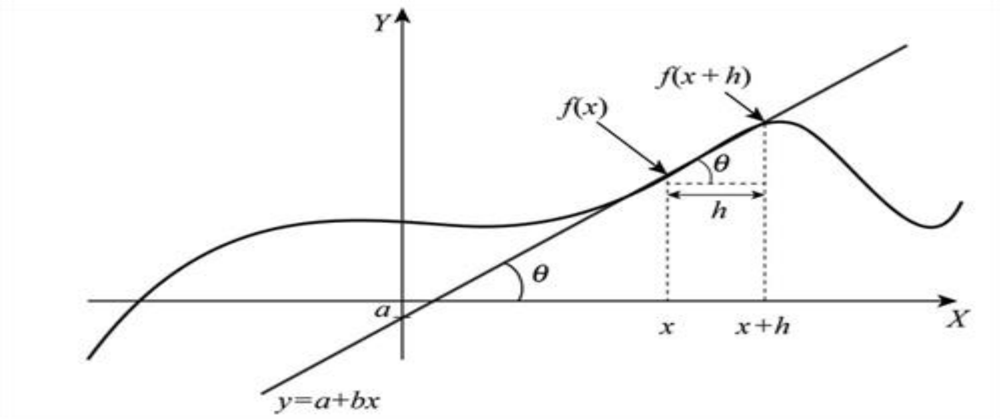
يتم تعريف الدالة المشتقة $f(x)$ عند اي نقطة باستخدام صيغة الميل التالية :

$$\text{Slope} = \frac{\text{Change in Y}}{\text{Change in X}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

والشكل التالي يُوضح مقدار التغير في بعض الكميات المتمثلة في Y، X كما يلي:



معدل التغير في نقطة ما، لنقل مثلا، (A)هو إنحِدارُ الدالة في تلك النقطة.



سنفترض الآن أن هذا التغير بقدر من الصغر بحيث أن إنحدار المسقيم المقاطع للمنحنى .
في (B)و (A) هو تقريبا مساوٍ لإنحدار المستقيم المماس في (A)
أي أننا لا نكاد نميز بين هاتين النقطتين والدالة بينهما تكاد لا تتغير. في هذه الحالة يمكننا أن نكتب :

" إشتقاق الدالة في النقطة(x_0) هو ($f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

(التغير في الدالة على التغير في نقطة من الدالة هو تقريباً إنحدار المستقيم المقاطع لمنحنى الدالة في نقطتين متناهيتي القرب)

مثال : جد مشتقة الدالة التالية $f(x) = x^2$ حسب التعريف.

الحل :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = ((x+h)^2 - x^2)/h$$

$$= (x^2 + 2xh + h^2 - x^2)/h$$

$$= h(2x + h)/h$$

$$= 2x + h.$$

مثال : جد مشتقة الدالة $f(x) = x^2 - 5$ حسب التعريف في النقطة (2,-1).

الحل :

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - 5 - x^2 + 5}{\Delta x}$$

$$= \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 5 - x^2 + 5}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$$

$$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

قوانين اشتقاق الدوال الجبرية:

1 - اذا كان $y = c$ حيث c عدد ثابت فأن $\frac{dy}{dx} = 0$

2- اذا كان $y = ax$ فأن $\frac{dy}{dx} = a$.

3- اذا كان $y = X^n$ فأن $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

4- لتكن f , g دالتين فأن $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

5- لتكن f , g دالتين فأن $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

6- لتكن f , g دالتين فأن $(fg)' = f g' + g f'$

7 - لتكن h , g دالتين فأن

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

مثال : جد مشتقة الدالة التالية $\mathbf{f(x) = 3x^5 -2 x^3 + 8x^2}$

الحل :

$f(x) = \mathbf{(3x^5 -2 x^3 + 8x^2)}$

$f'(x) = \mathbf{= 3 \times 5 x^4 - 2\times3x^2 + 8 \times 2x}$

$f'(x) = \mathbf{15 x^4 - 6 x^2 + 16x}$

مثال : جد مشتقة الدالة التالية $f(x) = 1/x^2$

الحل :

$f(x) = 1/x^2 = x^{-2}$

$f'(x) = -2x^{-3}$

$f'(x) = -2/x^3$

مثال : جد مشتقة الدالة التالية $f(x) = (5x^6 + 3x^4 - 8x^2 + 1)$

الحل :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(5\,x^6 + 3\,x^4 - 8\,x^2 + 1\right) &= 5\left(6\,x^5\right) + 3\left(4\,x^3\right) - 8\,(2\,x)\\ &= 30\,x^5 + 12\,x^3 - 16\,x.\end{aligned}$$

مثال : جد مشتقة الدالة التالية $y = x^2\,(3x+1)$

الحل :

$y = x^2\,(3x+1)$

فإن $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x(3x+1)$

$= 3x^2 + 6x^2 + 2x$

$= 9x^2 + 2x$