وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المعهد التقني / السماوة

تكنولوجيا المعلومات والاتصالات

اسم المادة : الرياضيات

اسم المدرسة : م.م لقاء طارق هادي

- صيغ الاعداد المركبة

(التحويل من صيغة الى اخرى - طريقة ديموافر للاعداد المركبة)

- المجموعات

(تقاطع المجموعات - اتحاد المجموعات- المجموعات الجزئية- ضرب مجموعة مع مجموعة اخرى)

صيغ كتابة العدد المركب

1 – الصيغة العامة $Z = x + i\,y$

2 – الصيغة القطبية $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

3 – الصيغة الاسية او صيغة اويلر $Z = re^{i\theta}$

الصيغة القطبية للأعداد المركبة

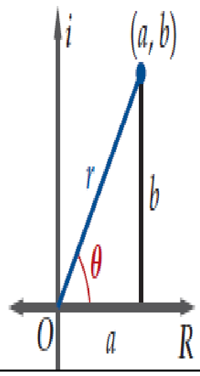
الصورة القطبية لعدد مركب

الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، حيث

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$، $a = r\cos\theta$، $b = r\sin\theta$،

$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ ، $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.



اذا كانت $a = 0$ فأن $\theta = \frac{\pi}{2}$

مثال : جد الصيغة القطبية للأعداد المركبة التالية :

1) $Z = 1 + i$ 2) $Z = -1 + i\sqrt{3}$

الحل :

1) $Z = 1 + i$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$r = \sqrt{1^2 + 1^2}$

$r = \sqrt{2}$

$a > 0$ ، $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 45$ ،

اذن الصيغة القطبية للعدد المركب

$$Z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

2) $-1 + i\sqrt{3}$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}$

$r = \sqrt{1 + 3}$

$r = 2$

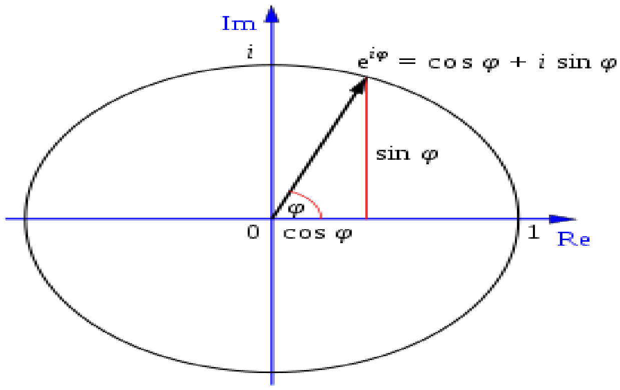
$a < 0$ ، $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = 120$ ،

اذن الصيغة القطبية للعدد المركب

$$Z = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

الصيغة الاسية (صيغة اويلر) للعدد المركب

هي صيغة رياضية في التحليل المركب التي تؤسس العلاقة الاساسية بين الدوال المثلثية والدالة الاسية ، تنص صيغة اويلر على ما يلي :



$$Z = x + i\,y = r\,e^{i\theta}$$

$$e^{\,i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

أي نقطة في المستوى المركب من الممكن أن تمثل بعدد مركب مكتوب في صورة إحداثيات ديكارتية، تقدم صيغة اويلر وسيلة للتحويل من هذه الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية، مما يقلل الحدين إلى حد واحد، وهذا بدوره يبسط عمليات ضرب أو قسمة الأعداد المركبة، كما يبسط رفعها لأي قوى.

مثال : حول العدد المركب $Z = 2 + 3i$ الى صيغة اويلر

الحل :

$$r = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\theta = tan^{-1}(\frac{3}{2}) = 56^0$$

$$re^{i\theta} = \sqrt{13}e^{56i}$$

مثال: حول العدد المركب $Z = 3 + 4i$ من الصيغة الجبرية الى الصيغة الاسية.

$$\mathbf{r} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53^0$$

$3 + 4i \longrightarrow 5e^{53i}$

الاعداد المركبة ونظرية ديموافر

الجزء الحقيقي للعدد المركب المعطى على الصورة الديكارتية a+bi هو a التخيلي هو bi ، ويمكنك تمثيل العدد المركب على المستوى المركب للنقطة (a,b) كما هو الحال بالمستوى الاحداثي ، فأننا نحتاج الى محورين لتمثيل العدد المركب ، يعين الجزء الحقيقي على محور افقي يسمى المحور الحقيقي في حين يعين الجزء التخيلي على محور رأسي يسمى المحور التخيلي .

$$z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

مثال : - حل على طريقة نظرية ديموافر

$Z = (1+ i)^{18}$

الحل :

إذا كان $1+ i = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ فسنحصل على

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\ ;\ \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4},$$

$$\theta = \alpha = \frac{\pi}{4} \qquad (\because\ 1+i \text{ lies in the first Quadrant})$$

Therefore $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Raising to power 18 on both sides,

$$(1+i)^{18} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{18} = \sqrt{2}^{18}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{18}.$$

By de Moivre's theorem,

$$(1+i)^{18} = 2^9\left(\cos\frac{18\pi}{4} + i\sin\frac{18\pi}{4}\right)$$

$(1+i)^{18} = 2^9(i) = 512\,i$

مثال : حل على طريقة نظرية ديموافر

$Z = (\sqrt{3} + i)^7$

$\mathbf{r} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^0$

$$(\sqrt{3}+i)^7=\left[2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)\right]^7$$
$$(\sqrt{3}+i)^7=2^7\left[\cos(7\cdot 30^\circ)+i\sin(7\cdot 30^\circ)\right]$$
$$(\sqrt{3}+i)^7=128(\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ)$$

$(\sqrt{3}+i)^7 = -110.851 - 64\,i$

المجموعات

المجموعة :- هي مفهوم اساسي في جميع فروع الرياضيات ، ويعتبر مفهوم المجموعة من المفاهيم الاولية يمكن تصور المجموعة على انها طائفة من الاشياء الموضوعة سوياً وتسمى هذه الاشياء عناصر المجموعة ، وعادة ما تكتب المجموعة باستخدام قوسين توضع بينهما عناصر المجموعة مثلاً :

N هي مجموعة الأعداد : 0,1,2,3
و تسمى مجموعة الأعداد الطبيعية

Z هي مجموعة الأعداد التي تشمل إضافةً إلى الأعداد السابقة الأعداد: ...-1,-2,-3
و تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة.

D هي مجموعة الأعداد التي تشمل إضافةً إلى الأعداد السابقة ، الأعداد التي تكتب بالصيغة
بحيث a عدد نسبي كامل و n عدد طبيعي كامل مثل 45.689 , 48.9
و تسمى مجموعة الأعداد العشرية

Q هي مجموعة الأعداد التي تشمل إضافة إلى كل الأعداد السابقة الأعداد (.....1/3, 2/3)
و تسمى مجموعة الأعداد النسبية.

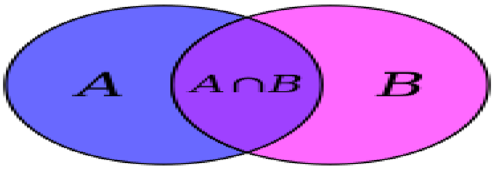
.

R هي مجموعة الأعداد التي تشمل كل الأعداد السابقة.
و تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية.

C هي مجموعة الأعداد التي تشمل إضافة إلى كل الأعداد السابقة ، الأعداد التخيلية
مثل : $i^2 = -1$
و تسمى مجموعة الأعداد المركبة.

تقاطع المجموعات

التقاطع : هو مجموعة العناصر المشتركة بين مجموعتين يُشار إلى تقاطع المجموعتين A و B ب.$A \cap B$ ، بصفة عامة ،) نقول ايضاً التقاطع وهو مجموعة العناصر التي تنتمي الى المجموعتين معاً(.



$A \cap A = A$

$A \cap B = B \cap A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

مثال :

إذا كانت $A = \{2، 3، 4، 5\}$ ، $B = \{2، 3، 6، 7\}$

أوجد $A \cap B$.

الحل :

$A \cap B = \{2,3\}$

مثال : لتكن $B = \{9,14,28\}$, $A = \{3,7,9,14\}$ مجموعتين جد $A \cap B$

الحل : -

$A \cap B = \{9, 14\}$

مثال :- إذا كانت

$F = \{8، 2، 6، 9\}$, $D = \{1، 7، 9، 6، 5\}$ ،

$M = \{2، 3، 4، 5، 6\}$ أوجد ما يلي:

$(D \cap M) \cap F = D \cap (M \cap F)$

الحل :

$(M \cap F) = \{6، 2\}$

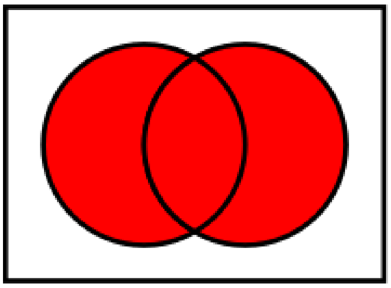
$D \cap (M \cap F) = \{2, 6\} \cap \{1, 7, 9, 6, 5\} = \{6\}$

$(D \cap M) = \{6، 5\}$

$(D \cap M) \cap F = \{8، 2، 6، 9\} \cap \{6، 5\} = \{6\}$

اتحاد المجموعات

الاتحاد : هو عملية على المجموعات التي تستخدم في دمج مجموعتين للحصول على مجموعة جديدة تحوي كلا المجموعتين A و B فأن اتحاد المجموعتين نرمزله بالرمز AU B وهو مجموعة تتكون من العناصر التي تنتمي الى المجموعة A و B .



$A \cup B = B \cup A$

$A \cup \emptyset = A$

$A \cup A = A$

مثال : لتكن B = { 9,14,28} , A = { 3,7,9,14} مجموعتين جد A ∪ B

الحل :

A ∪ B = **{ 3,7,9 , 14,28 }**

مثال : لتكن A = { 1,3,5,7} , B = { 2,4,6,8} مجموعتين جد A ∪ B

الحل :

A ∪ B = **{ 1,2,3 , 4,5,6,7,8 }**

مثال : لتكن
A = {11,12,13,14,18}، B = {14,15,16,18} فأوجد

(A ∩ B) (1
(A U B) (2

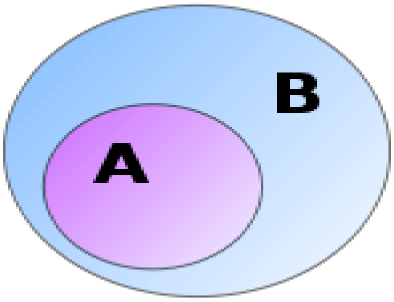
الحل:

:

(A ∩ B) = { 14,18}
{11,12,13,14,15,16,18}

المجموعات الجزئية

المجموعة الجزئية :في الرياضيات وبالتحديد في نظرية المجموعات، **المجموعة الجزئية** مصطلح رياضي في فرع نظرية المجموعات إذا كان كل عنصر في المجموعة A أيضاً عنصراً في المجموعة B تسمى عندها المجموعة A **مجموعة جزئية** من B إذا كانت A مجموعة جزئية من B و Bمجموعة جزئية منA ، عندها يكون B = A .



اذا كانت المجموعة B هي مجموعة جزئية (او محتواه) في A يرمز لها بالرمز $B \subseteq A$.

امثلة :

1 - المجموعة {1,2} هي مجموعة جزئية من {1,2,3 }.

2- اي مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها.

3- المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من أي مجموعة ويرمز لها Ø.

4-مجموعة الاعداد الطبيعية هي مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الكسرية .

مثال : لتكن B = { 9,14,28} , A = {9,14} مجموعتين فأن

{9,14} ⊂{9,14,28}

A ⊂ B

ضرب مجموعة مع مجموعة اخرى

الضرب الديكارتي أو الضرب التبادلي وهو عبارة عن ضرب مجموعتين غير فارغتين أو أكثر ببعضها البعض، على سبيل المثال؛ المجموعة R: {1، 6، 7}، والمجموعة T: {6، 7، 8}، وعند ضرب المجموعتين يُعبر عنهما بالرمز R × T، بحيث يكون ناتج الضرب هو جميع

الأزواج المرتبة الناتجة من عملية ضرب المجموعتين.

ضرب المجموعتين نرمز له بالرمز $A \times B$ هي مجموعة الازواج المرتبة (a ,b) بحيث $a \in A$ و $b \in B$.

مثال : جد حاصل الضرب بين المجموعتين $A = \{ 1,2\}$ و $B = \{ 4,5\}$.

الحل :

$$A \times B = \{ 1,2\} \times \{ 4,5\} = \{ (1,4) , (2,4), (1,5) , (2,5)\}$$

مثال : لتكن $A = \{ 1,2,3\}$ و $B = \{ -1,-2\}$ جد $A \times B$ و $B \times A$.

الحل :

$$A \times B = \{ 1,2,3\} \times \{ -1,-2\} = \{ (1,-1) , (2,-1), (3,-1) , (1,-2)), (2,-2) , (3,-2)\}$$

$$B \times A = \{ -1,-2\} \times \{ 1,2,3\} = \{ (-1, 1) , (-2, 1), (-1,2) , (-2, 2)), (-1,3) , (-2,3)\}$$

$$B \times A \neq A \times B$$