وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المعهد التقني / سماوة

قسم تكنولوجيا المعلومات والاتصالات

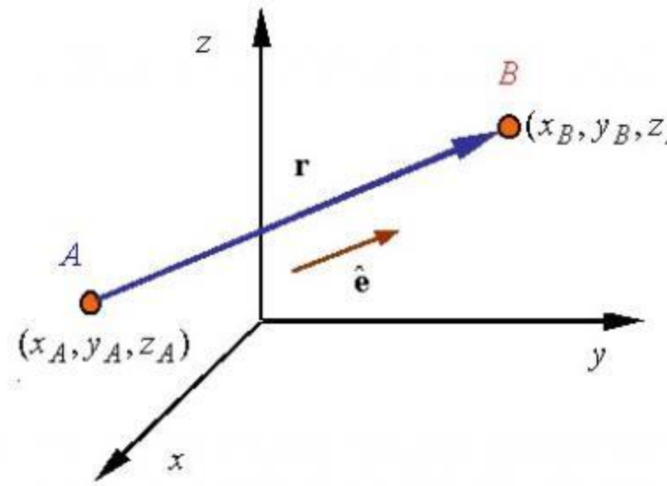
مدرسة المادة :م .م لقاء طارق هادي

اسم المادة: الرياضيات

- المتجهات (Vectors)
- الاعداد المركبة (Complex Number)

المتجهات (Vectors)

المتجهات هي تمثيلات هندسية للحجم والاتجاه والتي يتم تمثيلها غالبًا بأسهم مستقيمة ، تبدأ من نقطة واحدة على محور إحداثيات وتنتهي عند نقطة مختلفة ، جميع المتجهات لها طول ، يُطلق عليه المقدار ، والذي من خلاله يمكن مقارنة المتجه مع متجه آخر ، المتجهات كونها سهام ، لها أيضًا اتجاه .



تصنيف المتجهات :

1 - المتجه الصفري :

ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ هو متجه مقداره صفر واتجاهه غير معين فمثلاً نجد انه اذا كان $\vec{B}$ هو اي متجه فأن

$$\vec{B} - \vec{B} = \vec{0}$$

2 – متجه الوحدة :

اذا كان $\vec{A}$ متجه غير صفري فأن متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\vec{A}$ يعرف رياضياً على انه حاصل قسمة المتجه $\vec{A}$ على مقداره A .

3 – المتجه العادي :

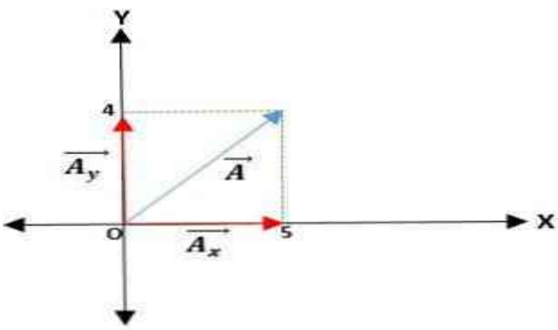
هو اي متجه له مقدار وله اتجاه. فالسرعة مثلاً يعبر عنها بالمتجه $\vec{V}$ حيث يرمز V لمقدار المتجه بينما يرمز السهم $\rightarrow$ للاتجاه .

تحليل المتجهات Vector Analysis

ليكن A متجه يقع في الاحداثيات الكارتيزية x,y يمكن تحليله إلى مركبتين المركبة الأولى في اتجاه محور x وتسمى المركبة الأفقية والمركبة الثانية في اتجاه المحور y وتسمى المركبة الرأسية.

إما أن يكون المتجه في بعد واحد ، كالاتجاه x ، أو y ، أو في بعدين ، أي في كلا الاتجاهين ، أوفي ثلاثة أبعاد أو أكثر. ومهما كانت الحالة ، فإنه يمكننا اعتبار أن أي متجه عبارة عن مجموع متجهين أو أكثر . ومجموعة المتجهات التي تجمع لتكون متجها واحدا تسمى مركبات (Components) هذا المتجه.

تسمى عملية جمع متجهين أو أكثر لإعطاء متجه واحد عملية تركيب المتجهات . أما في حالة الاستعاضة عن المتجه بمتجهين أو أكثر ، فإن العملية تسمى تحليل المتجهات . وأسهل الطرق وأكثرها شيوعا في تحليل المتجهات هي استخدام المحاور المتعامدة .



ففي حالة تحليل المتجه **A** في البعدين المتعامدين **X**، **Y** ، فإن المتجه **A** يساوي مجموع متجهين متعامدين يتحدان معه في نقطة البداية ، وأحدهما يكون في الاتجاه x ، والآخر يكون في y . بحيث يكون المتجه **A** هو قطر متوازي الأضلاع المكون من المتجهين (المركبتين) .

ومركبة المتجه في اتجاه ما تعني المسقط العمودي لهذا المتجه على هذا الاتجاه.

المركبة على محور X $\quad A_x = A \cos 0$

المركبة على محمور Y $\quad A_y = A \sin 0$

علماً بان المتجه (A) هو حاصل جمع المتجهين $A_x \, . \, A_y$

$$A = A_x + A_y$$

♣الكميات المتجهة والقياسية ♣

1- الكميات العددية (القياسية) Scalar Quantities:

وهذه الكميات يلزم لتعريفها مقدار عددي (عدد حقيقي ، رقم) ووحدة فيزيائية
ومن هذه الكميات :
الحجم ، الكتلة ، الزمن ، الشغل والطاقة .

2- الكميات المتجهة Vector Quantities:

وهي الكميات التي يلزم لتعريفها مقدار عددي (عدد حقيقي موجب) ووحدة فيزيائية واتجاه . ولا يتم تعريفها الا اذا اكتملت هذه العناصر .
ومن الامثلة على الكميات المتجهة : السرعة ، القوة و الإزاحة . **والطريقة المناسبة لتمثيل المتجهة بيانياً هي أن يرسم المتجه على هيئة خط مستقيم يتناسب طوله مع مقدار المتجه يوضع سهم على إحدى نهايتيه لبيان الاتجاه.**
ويرمز للمتجهات بالرموز ...... ,A ,B ,C ,V ولكل متجه ثلاثة متغيرات هي **k,j,i ويكتب**

$$\vec{A} = a_1\, i + a_2\, j + a_3\, k$$

♠♠العمليات الجبرية على المتجهات♠♠

هناك عدة عمليات على المتجهات ومنها :

1 – جمع المتجهات .

2 – طرح المتجهات .

3 – ضرب المتجه بعدد ثابت .

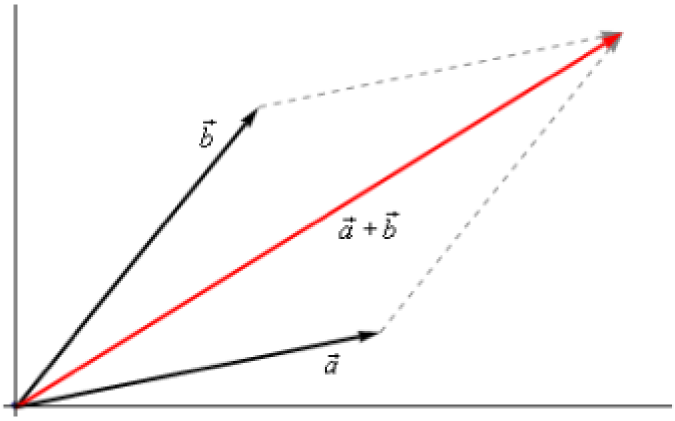
4 – ايجاد طول المتجه

جمع متجهين Addition of two vectors

حيث ان المتجهات لا تمثل اعداداً جبرية فقط وانما اتجاهات ايضاً لذا فان جمع المتجهات يخضع لقواعد جمع المسافات (قاعدة المثلث او قاعدة متوازي الاضلاع) على ذلك يمكن تمثيل جمع المتجهات ليكن

ليكن $\vec{a}, \vec{b}$ متجهين فان ناتج جمع المتجه $\vec{b}$ مع المتجه $\vec{a}$ هو $\vec{c}$

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$



$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3 \rangle$

مثال : ليكن

$\vec{A} = 2i + 3j + 4k$, $\vec{B} = i+j+k$ جد $\vec{A} + \vec{B}$

الحل : $\vec{A} + \vec{B} = 3i + 4j + 5k$

مثال : ليكن

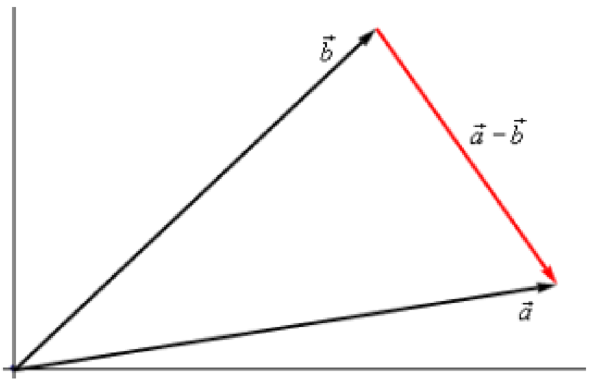
$\vec{A} = 3i + 7j + 2k$, $\vec{B} = 2i+j+5k$ جد $\vec{A} + \vec{B}$

الحل : $\vec{A} + \vec{B} = 5i + 8j + 7k$

Subtraction of two vectors طرح متجهين

ليكن $\vec{a}, \vec{b}$ متجهين فان ناتج طرح المتجه $\vec{b}$ من المتجه $\vec{a}$ هو $\vec{d}$

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$



$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{a} - \vec{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$

حسابياً يكون طرح متجهين مشابهاً لجمعهما.

ملاحظة : لا يمكن ان نجمع او نطرح متجهين ما لم يكن لهما نفس العدد من المركبات .

مثال : ليكن

$\vec{A} = 2i + 3j + 4k$, $\vec{B} = i + j + k$ جد $\vec{A} - \vec{B}$

الحل :

$\vec{A} - \vec{B} = 1i + 2j + 3k$

مثال : ليكن

$\vec{A} = 4i + 3j + 4k$, $\vec{B} = 2i + j + 3k$ جد $\vec{A} - \vec{B}$

الحل :

$\vec{A} - \vec{B} = 2i + 2j + k$

ضرب المتجه بعدد ثابت:

عند ضرب متجه مثل $\vec{A}$ في عدد معين ينتج لنا متجه جديد له اتجاه المتجه $\vec{A}$ ومقداره يساوي $\vec{A}$ مضروباً في العدد فمثلاً

اذا كان $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و c أي ثابت فان :

$c\vec{a} = (ca_1, ca_2, ca_3)$

مثال 1 : اذا كان $\vec{a} = (3, -9, 1)$ و $\vec{w} = -i + 8k$ احسب $2\vec{a} - 3\vec{w}$

الحل:

$2 . \vec{a} = (6, -18, 2)$

$\vec{w} = -i + 8k \longrightarrow \vec{w} = (-1, 0, 8) \longrightarrow 3 . \vec{w} = (-3, 0, 24)$

$2\vec{a} - 3\vec{w} = (6 , -18 , 2) - (-3 , 0 , 24) = (9 , -18 , -22)$

مثال 2 : ليكن $\vec{A} = 2i + 3j + 4k$, $\vec{B} = i + j + k$ جد $3\vec{B}$, $5\vec{A}$

الحل:

$5.\vec{A} = (5.2)\, i + (5.3)\, j + (5.4)\, k = 10i + 15j + 20k$

$3.\vec{B} = (3.1)\, i + (3.1)\, j + (3.1)\, k = 3i + 3j + 3k$

ايجاد طول المتجه:

طول المتجه $\vec{v}(a1 , a2 , a3)$ هو :

$\|\vec{v}\| = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{(1/2)}$

مثال : جد طول كل من المتجهات الاتية :

1) $\vec{a} = \langle 3, -5, 10 \rangle$
2) $\vec{w} = \langle 0, 0 \rangle$
3) $\vec{u} = \langle 1, 0, 0 \rangle$

الحل : (1

$$\|\vec{a}\| = (9 + 25 + 100)^{1/2} = \sqrt{134}$$

ملاحظة : اذا كان $\|a\| = 0$ فأن a هو المتجه الصفري.

2) $\vec{w} = \langle 0, 0 \rangle$ هو المتجه الصفري .

3) $\vec{u} = 1$

المتجهات المتعامدة

يكون المتجهان متعامدان اذا كانت الزاوية بينهما تساوي °90 وبالتالي سنحصل على

$a.\, b = 0$

فإذا كان $a = (a_1 , a_2, a_3)$, $b = (b_1 , b_2, b_3)$ متجهين فأن:

أ) $a \,.\, b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

ب) يكون المتجهان a , b متعامدين إذا وفقط إذا كان $a \,.\, b = 0$

مثال :بين اذا كان المتجهين a و b متعامدين

$\vec{a} = (6,-2,-1)$ و $\vec{b} = (2,5,2)$

الحل :

$\vec{a}.\, \vec{b} = 12 - 10 - 2 = 0$

المتجهان متعامدان .

مثال : بين أن المتجه (4- ،7- ،8) يعامد كلا من المتجهين $\vec{v}$,$\vec{w}$

$\vec{v} = (1, 0, 2)$

$\vec{w} = (3, 4, -1)$

نلاحظ أن:

$(1, 0, 2) \cdot (8, -7, -4) = 8 + 0 - 8 = 0$

$(3, 4, -1) \cdot (8, -7, -4) = 24 - 28 + 4 = 0$

الضرب العددي (القياسي)

ويقال له احياناً الضرب القياسي او النقطي او الداخلي لكن جميعها تشير الى شيء واحد هو ان ضرب اي متجهين ضرباً عددياً يعطينا في النتيجة كمية عددية ليس لها اتجاه .

ويميز الضرب القياسي بوضع نقطة بين المتجهين المضروبين $\vec{A}.\vec{B}$ وتلفظ (A dot B) او (A نقطة B).

ليكن كل من $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجه فأن الضرب العددي او النقطي لهما هو :

$$\boxed{\vec{a}.\,\vec{b}} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

مثال : احسب الضرب العددي للمتجهين التاليين.

$\vec{a} = (0,3,-7)$ و $\vec{b} = (2,3,1)$

الحل :

$$\vec{a}.\vec{b} = 0 + 9 - 7 = 2$$

مثال : جد الضرب العددي لكل مما يأتي :

1 -

$\vec{v} = 5\vec{i} - 8\vec{j}$ و $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j}$

$\vec{a} = \langle 0,3,-7 \rangle$, $\vec{b} = \langle 2,3,1 \rangle$

الحل:

- $\vec{v}.\vec{w} = 5 - 16 = -11$
- $\vec{a}.\vec{b} = 0 + 9 - 7 = 2$

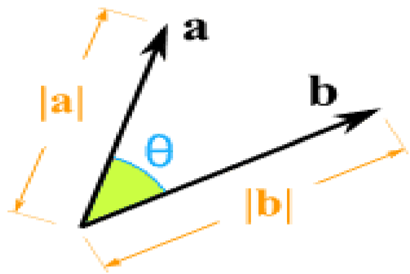
خصائص:

ليكن كل من a, b, c متجهات فأن :

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- $a \cdot b = b \cdot a$
- $a \cdot a = a^2$
- $(ca) \cdot b = a \cdot (cb) = c\ (a \cdot b)$

أذا كان $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ فان $\vec{a} = 0$

ملاحظة : يوجد تمثيل هندسي للضرب العددي . لتكن θ هي الزاوية بين المتجهين a و b بحيث ان $0 \le \theta \le \pi$ كما في الرسم ادناه :



ولايجاد ناتج الضرب ، فأننا نضرب مقدار المتجه الاول في مقدار المتجه الثاني في جيب تمام الزاوية بينهما وذلك حسب العلاقة :

$$A.B = \boxed{\|A\|\ \|B\|\ \cos \theta_{AB}}$$

حيث θ_{AB} الزاوية المحصورة بين A و B بينما A و B طول كل منهما، على الترتيب.

فأذا كان المتجهان متعامدين فأن $\cos 90^{\circ} = 0$ وعليه فأن $A.B = 0$

فأن الصيغة اعلاه لا تستخدم لاستخراج الضرب النقطي لمتجهين وانما تستخدم لاستخراج الزاوية المحصورة بين المتجهين .

ونلاحظ :

$$A.(B+C) = A.B + A.C$$

مثال : جد الزاوية بين المتجهين

$\vec{a}=(3,-4,-1)\ ,\ \vec{b}=(0,5,2)$

الحل : نحتاج الى الضرب العددي لاستخراج الزاوية بين المتجهين

$a.b = \|a\|\ \|b\| \cos\theta$

$\vec{a}.\vec{b} = 0-20-2 = -22\ ,\ \|a\| = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$

$,\ \|b\| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

$\text{Cos}\ \theta = \frac{(a.b)}{\|a\|\|b\|} = \frac{-22}{\sqrt{26}\sqrt{29}} = -0.80119$

وبالتالي ستكون

$\theta = \cos^{-1}(-0.80119) = 134$

الضرب الاتجاهي

ويسمى ايضاً بالضرب التقاطعي ويكتب بوضع اشارة (x) بين المتجهين مثل A x B وتلفظ A تقاطع B ويختلف الضرب الاتجاهي عن الضرب القياسي في ان حاصل الضرب يكون متجهاً جديداً كما هو واضحاً من التسمية اذن :

$$A \times B = R$$

نلاحظ هنا ان R هي كمية متجهة ، لكن R في الضرب العددي هي كمية عددية . ولذلك عندما يطلب ايجاد حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين يجب ايجاد قيمة (مقدار حاصل الضرب ، ومن ثم تعيين اتجاه المتجه الذي يمثل حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين) .

ونلاحظ :

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفراغ :

بوضع متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ في الصف 1
بوضع إحداثيات $\mathbf{a}$ في الصف 2
بوضع إحداثيات $\mathbf{b}$ في الصف 3

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بتطبيق قاعدة إيجاد قيمة محدّدة مصفوفة من الرتبة 3×3

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

بإيجاد قيمة كل محدّدة من الرتبة 2×2

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

مثال : ليكن $v = 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $u = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ جد $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

الحل :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= 17\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

تطبيقات على المتجهات

تستخدم المتجهات لقياس كميات ومقادير الأشياء، ولها أهميات كثيرة، ومنها:

1 - قياس طول الاشياء.
2- معرفه درجه حرارة الجسم.
3- قياس سرعه السيارة.
4- قياس سرعه الرياح واتجاهها.

5 – عرض الرسوم على شبكة الانترنيت يتم عرض الرسوم عبر تقنية خاصة تعرف بالرسومات المتجهة متغيرة الحجم .

6 – صناعة الاسلحة وذلك في حركة الطلقة المندفعة بقوة نحو الهدف .

7 – عند تسديد لاعبي الكرة نحو المرمى واختيار الزاوية المناسبة للتسديد .

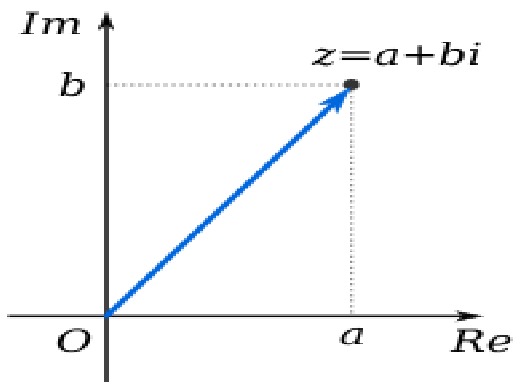
الاعداد المركبة (Complex Number)

الأعداد المركبة (Complex Number): هي الأعداد التي تتكوّن من كل من الأعداد الحقيقية، والأعداد التخيلية، أما الأعداد التخيلية فهي تلك الاعداد التي تُعطي نتيجة سالبة عند تربيعها، وهي بذلك تختلف عن الأعداد الحقيقية التي يساوي مربع أي عدد فيها قيمة موجبة؛ فتربيع أي عدد حقيقي موجب يُعطي نتيجة موجبة، كما أنّ تربيع أي عدد حقيقي سالب يُعطي نتيجة موجبة أيضاً؛

العدد المركب Z يعرف بأنه زوج مرتب $Z(x ,y)$ حيث x, y عددان حقيقيان او يكتب $Z = x +iy$

x يسمى الجزء الحقيقي Real part
y يسمى الجزء الخيالي Img part
i يسمى بالوحدة الخيالية

$i^2 = -1$ ، $i^3 = -\sqrt{-1}$



$Z = (2,3)$

$Z = 2 + 3i$

$X = R(Z) = 2$

$y = Im(Z) = 3$

جمع الاعداد المركبة

جمع الأعداد المركبة: عند جمع عددين مركبين فإنه يجب جمع العددين التخيلين مع بعضهما ووضع الناتج وجمع العددين الحقيقيين مع بعضهما ووضع الناتج بجانب الناتج الأوّل، والمثال الآتي يوضّح ذلك:

تتم عملية الجمع كما يلي:

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

مثال : جد حاصل جمع العددين المركبين

$$\mathbf{Z_1 = 1 + 2i}$$

$$\mathbf{Z_2 = 2 - i}$$

الحل :

$$\mathbf{Z_1 + Z_2 = (1 + 2) + i(2 + (-1))}$$

$$\mathbf{= 3 + i}$$

مثال : جد حاصل جمع العددين المركبين $2Z_1 + 3Z_2$

$$\mathbf{Z_1 = 3 + 2i}$$

$$\mathbf{Z_2 = 4 - 3i}$$

الحل :

$$\mathbf{2Z_1 = 6 + 4i}$$

$$\mathbf{3Z_2 = 12 - 9i}$$

$$\mathbf{2Z_1 + 3Z_2 = (6 + 12) + i(4 + (-9))}$$

$$\mathbf{= 18 - 5i}$$

طرح الاعداد المركبة

$$Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

مثال : جد حاصل طرح العددين المركبين $Z_1 - Z_2$

$Z_1 = 2 + 3i$

$Z_2 = 4 + 5i$

الحل :

$Z_1 - Z_2 = (2 - 4) + i\,(3 - 5)$

$= -2 - 2i$

مثال : جد حاصل طرح العددين المركبين $4Z_1 - 3Z_2$

$Z_1 = 2 + 3i$

$Z_2 = 4 - 2i$

الحل :

$4Z_1 = 8 + 12i$

$3Z_2 = 12 - 6i$

$4Z_1 - 3Z_2 = (8 - 12) + i\,(12 - (-6))$

$= -4 + 18i$

ضرب الاعداد المركبة

إن عملية ضرب الأعداد المركبة تشبه إلى حد ما عملية ضرب الاقتران كثير الحدود، كما أنّ نتيجة ضرب العدد التخيلي بعدد تخيلي آخر تُعطي دائماً عدداً حقيقياً

$$\boxed{Z_1.Z_2 = (X_1 + iy_1)(X_2 + iy_2)} = X_1.X_2 + iX_1.y_2 + iX_2y_1 + y_1.y_2 \,.\, i^2$$

$$Z_1.Z_2 = (X_1.X_2 - y_1.y_2) + i\,(X_1y_2 + X_2.y_1)$$

مثال : جد حاصل ضرب الاعداد المركبة

$Z_1 = (3+2i)$

$Z_2 = (1 + 4i)$

الحل :

$(3 + 2i)(1 + 4i) = 3+12i+ 2i + 8i^2$.

$= 3 - 8 + 14i$

$= -5 +14i$

مثال : جد حاصل ضرب العددين المركبين

$Z_1 = 1 + 2i$

$Z_2 = 2 - i$

الحل :

$Z_1.Z_2 = 2 - i + 4i-2i^2 \longrightarrow i^2 = -1$

$=2 + 3i+2$

$=4 + 3i$

قسمة الاعداد المركبة

عند قسمة الأعداد المركبة يجب الحصول أولاً على العدد المرافق للعدد المركب، والذي يُعرف بأنّه نفس العدد المركب، مع عكس الإشارة في الوسط.

مثال : جد حاصل قسمة العددين المركبين

$Z_1 = 3+2i$

$Z_2 = 4 - 3i$

الحل :

$$\frac{3+2i}{4-3i}$$

$$\frac{3+2i}{4-3i} \cdot \frac{4+3i}{4+3i}$$

$$\frac{12+9i+8i+6i^2}{16+12i-12i-9i^2}$$

$$\frac{12+9i+8i+6(-1)}{16+12i-12i-9(-1)} = \frac{12+9i+8i-6}{16+12i-12i+9}$$

$$\frac{6+17i}{25}$$

$$\frac{6}{25}+\frac{17}{25}i$$

مثال : جد حاصل قسمة العددين المركبين

$$\frac{4+5i}{2+6i}$$

الحل :

$$\frac{4+5i}{2+6i}\cdot\frac{2-6i}{2-6i}$$

$$\frac{8-24i+10i-30i^2}{4-12i+12i-36i^2}$$

$$\frac{8-24i+10i-30(-1)}{4-12i+12i-36(-1)} = \frac{8-24i+10i+30}{4-12i+12i+36}$$

$$\frac{38-14i}{40}$$

$$\frac{38}{40}-\frac{14}{40}i$$

$$\frac{19}{20}-\frac{7}{20}i$$

تمارين

تمرين1 :

اذا كان $B = i - j + k$ و $A = 2i + 6j - 3k$ فما الزاوية بينهما ؟

اكتب المعادلة هنا.**الحل :** $A.B = (2)(1) + (6)(-1) + (-3)(1) = -7 = AB\cos\theta_{AB}$

حيث

$$A = \sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (-3)^2} = 7$$

$$B = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = 1.7$$

$$\cos\theta_{AB} = \frac{A.B}{AB} = -0.58 \Rightarrow \quad \theta_{AB} = 125^0$$

تمرين 1: اذا كان $F = 3i + j - 5k$ و $R = 2i - 4j + k$ جد $\tau = R \times F$

الحل :

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\tau = R \times F = (20 - 1)i + (3 - (-10))j + (2 - (-12))k = 19i + 13j + 14k$$

تمرين : جد حاصل ضرب العددين المركبين

$$(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 9i^2 - 6i + 6i$$

$$= 4 - 9(-1)$$

$$= 4 + 9 = 13$$