وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المعهد التقني / سماوة

قسم تكنولوجيا المعلومات والاتصالات

مدرسة المادة : م.م لقاء طارق هادي

- **حل المعادلات الخطية**
- **طريقة كرامر**
- **تطبيقات على المحددات**

حل المعادلات الخطية

المعادلة الخطية (Linear equation) : هي المعادلة التي كل حد فيها هو عدد ثابت، قد تحتوي المعادلة الخطية على متغيّرٍ واحد، أو أي عدد آخر من المتغيّرات.

بديهيات:

1- **بديهية الجمع : عند اضافة كميتين متساويتين على جانبي المعادلة ، ستظل المعادلة متساوية.**
2- **بديهية الطرح : عندما يتم طرح كميتين متساويتين على جانبي المعادلة ، تظل المعادلة متساوية .**
3- **بديهية الضرب : عندما نضرب طرفي المعادلة بنفس القيمة ، تظل المعادلة متساوية .**
4- **بديهية القسمة : عندما نقسم كلا طرفي المعادلة بنفس القيمة تبقى المعادلة متساوية .**
5- **بديهية التوزيع :** $a(b+c) = ab + ac$

خطوات حل المعادلة من الدرجة الاولى بمتغير واحد:

1 - اولا علينا ان نرى المتغير الذي نحتاج الى عزله .

2 – ثم نميز بين المتغيرات والثوابت.

3 – نقوم بتجميع المتغيرات على الجانب الايسر والثوابت على اليمين .

4 – باستخدام البديهيات التي ذكرناها اعلاه ،نقوم باجراء عمليات جبرية حتى نتمكن من الحصول على قيمة المتغير.

مثال : جد حل المعادلة الخطية التالية

$$6x + 8 = 12$$

الحل:

$$6x + 8 - 8 = 12 - 8$$

$$6x = 4$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{4}{6}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

مثال :جد حل المعادلة الخطية التالية :

$$3(x+8) - 2 = 3(9-x)$$

الحل :

$$3(x+8) - 2 = 3(9-x)$$

$$3x + 24 - 2 = 27 - 3x$$

$$3x + 22 = 27 - 3x$$

$$3x + 22 + 3x = 27 - 3x + 3x$$

$$6x + 22 = 27$$

$$6x + 22 - 22 = 27 - 22$$

$$6x = 5 \longrightarrow \frac{6x}{6} = \frac{5}{6} \longrightarrow x = \frac{5}{6}$$

حل معادلة خطية من الدرجة الثانية :

هي معادلة من الدرجة الثانية يمكن التعبير عنها بالصيغة $ax^2 + bx + c = 0$

حيث المعاملات a , b, c ثوابت .

مثال : جد حل المعادلة الخطية التالية :

1) $x^2 + 7x + 12 = 0$ 2) $x^2 - 2x - 8 = 0$ 3) $x^2 - 8x + 15 = 0$

الحل:

1) $x^2 + 7x + 12 = 0$

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$x^2 + 7x + 12 = 0 \longrightarrow (x+3)(x+4) = 0$$

$$x + 3 = 0 \quad \text{or} \quad x + 4 = 0$$

$$x = -3 \quad \text{or} \quad x = -4$$

2) $x^2 - 2x - 8 = 0$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0$$

$$x - 4 = 0 \quad \text{or} \quad x + 2 = 0$$

$$x = 4 \quad \text{or} \quad x = -2$$

مثال : جد حل المعادلة التالية:

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \text{ or } x = -4$$

طريقة اخرى للحل :

$$x^2 = 16 \longrightarrow x^2 - 16 = 0 \longrightarrow (x+4)(x-4) = 0$$

$$x + 4 = 0 \quad \text{or} \quad x - 4 = 0 \longrightarrow x = -4 \quad \text{or} \quad x = 4$$

طريقة كرامر لحل المعادلات الخطية

تسمى المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات بعدة متغيرات بعد ترتيب النظام **مصفوفة المعاملات** .

قاعدة كرامر : يمكن استعمال المحددات لحل أنظمة معادلات .

فإذا كانت قيمة المحددة لمصفوفة المعاملات لاتساوي صفراً ،**فإن** للنظام حلاً وحيدا .

وإذا كانت قيمة المحددة صفراً ، **فإما** أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول **أو** لا حل له .

هناك طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية تسمى **قاعدة كرامر** .

مفهوم أساسي — أضف إلى مطويتك

قاعدة كرامر

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام

$$ax + by = m$$
$$fx + gy = n$$

، حيث $C = \begin{vmatrix} a & b \\ f & g \end{vmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|C|}$ و $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|C|}$ ، وذلك إذا كانت $C \neq 0$.

يمكن استعمال قاعدة كرامر لحل نظام مكون من ثلاث معادلات أيضا .

مفهوم أساسي — أضف إلى مطويتك

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام

$$ax + by + cz = m$$
$$fx + gy + hz = n$$
$$jx + ky + \ell z = p$$

، حيث $C = \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{vmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|},\quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|},\quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$$

وذلك إذا كانت $|C| \neq 0$.

لحساب محدد 3x3 نستخدم احدى الطريقتين :

الطريقة الأولى: باستعمال قاعدة الأقطار

خطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحددة.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

خطوة 2: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 3: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

خطوة 4: لإيجاد قيمة المحددة نطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2 .

الطريقة الثانية: باستعمال محددة المصفوفة 2 × 2 .

$$a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

مثال : حل المعادلات التالية بطريقة كرامر:

$$3x+5y=-7$$
$$x+4y=-14$$

$$D=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{find its determinant}}|D|=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 4\end{vmatrix}=(3)(4)-(5)(1)=\boxed{7}$$

$$D_x=\begin{bmatrix}-7 & 5\\ -14 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{find its determinant}}|D_x|=\begin{vmatrix}-7 & 5\\ -14 & 4\end{vmatrix}=(-7)(4)-(5)(-14)=\boxed{42}$$

$$D_y=\begin{bmatrix}3 & -7\\ 1 & -14\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{find its determinant}}|D_y|=\begin{vmatrix}3 & -7\\ 1 & -14\end{vmatrix}=(3)(-14)-(-7)(1)=\boxed{-35}$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{42}{7}=6$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-35}{7}=-5$$

مثال : حل المعادلات التالية بطريقة كرامر:

$$\begin{cases} -y-2z=-8 \\ x \quad +3z=2 \\ 7x+y+z=0 \end{cases}$$

الحل :

$$D=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_x=\begin{bmatrix} -8 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_y=\begin{bmatrix} 0 & -8 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_z=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} |D| &= -22 \\ |D_x| &= 22 \\ |D_y| &= -132 \\ |D_z| &= -22 \end{aligned}}$$

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{22}{-22} = -1$$

$$y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{-132}{-22} = 6$$

$$z = \frac{|D_z|}{|D|} = \frac{-22}{-22} = 1$$

استخدام المحددات لأيجاد قيمة التيارات في الدوائر الالكترونية:

نستطيع استخدام المصفوفات في الشبكات الكهربائية والالكترونية بشكل واسع، ولدراسة هذا التطبيق بشكل مبسط نأخذ المثال التالي ، حيث لدينا شبكة من ثلاث حلقات، والمطلوب تحديد التيارات المارة خلالها.

$$11I_1 - 3I_2 = 30$$

$$-3I_1 + 6I_2 - I_3 = 5$$

$$-I_2 + 3I_3 = -25$$

ثم نقوم بالتحويلات الاولية على الاسطر للمصفوفة الموسعة التي تقودنا إلى الحل $I_1 = 3$ أمبير، $I_2 = 1$ أمبير، $I_3 = -8$ أمبير ، ولكن القيمة السالبة ل I_3 تدل على الجهة فقط .

واجب

حل المعادلة الخطية التالية بطريقتين:

$3x^{2} = 18$

تمارين =

تمرين : حل المعادلة الخطية التالية

$$
\begin{aligned}
2(x-1)+8 &= 4x-20 \\
2x-2+8 &= 4x-20 \\
2x+6 &= 4x-20 \\
2x-4x &= -20-6 \\
-2x &= -26 \qquad / \div (-2) \\
\boxed{x = 13}
\end{aligned}
$$

تمرين : حل المعادلة الخطية التالية

$$\frac{6x+2}{3} - 1 = 3x$$

$$\frac{(6x+2)}{3} - \frac{3}{3} = 3x$$

$$(6x+2) - 3 = 9x$$

$$6x + 2 - 3 = 9x$$

$$6x - 9x = 1$$

$$-3x = 1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

تمرين : حل المعادلات التالية بطريقة كرامر:

$$4x - 3y = 11$$

$$6x + 5y = 7$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{find its determinant}} |D| = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (4)(5) - (-3)(6)$$

$$= 20 - (-18)$$

$$= 20 + 18$$

$$= 38$$

$$D_x = \begin{bmatrix} 11 & -3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{find its determinant}} |D_x| = \begin{vmatrix} 11 & -3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = (11)(5) - (-3)(7)$$

$$= 55 - (-21)$$

$$= 55 + 21$$

$$= 76$$

$$D_y = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{find its determinant}} |D_y| = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = (4)(7) - (11)(6)$$

$$= 28 - (66)$$

$$= -38$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{76}{38} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-38}{38} = -1$$

تمرين : حل المعادلات التالية بطريقة كرامر:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Cramer's Rule $x_1 = \dfrac{|\,\mathbf{b} \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3\,|}{|A|}, x_2 = \dfrac{|\,\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{a}_3\,|}{|A|}, x_3 = \dfrac{|\,\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{b}\,|}{|A|}.$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 7 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}.$$