السلام عليكم ورحمة الله وبركاته

اسم المدرسة : م.م لقاء طارق هادي

اسم المادة : رياضيات

المصفوفات والمحددات

تعريف المصفوفة

المصفوفة عبارة عن تنظيم عددي مؤلف من $m\times n$ m عنصر مرتبة في جدول مستطيل ، مكونة من m عمودا ، n صفا حيث $m , n \in N^*$

ويقال أن المصفوفة من الشكل mxn. إذا كانت تحتوي m صفا و n عموداً.

$$\begin{array}{r|ccc|}
 & \text{العمود الأول} & \text{العمود الثاني} & \text{العمود الثالث} \\
\text{الصف الأول} & a_{11} & b_{12} & c_{13} \\
\text{الصف الثاني} & a_{21} & b_{22} & c_{23} \\
\text{الصف الثالث} & a_{31} & b_{32} & c_{33}
\end{array}$$

أمثلة على المصفوفات

- يبين الشكل التالي مجموعة من المصفوفات :

$$A=\begin{pmatrix}5 & 7 & 10\\ 3 & 5 & 12\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 7 & 5\\ 10 & 12\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0.5\\ 2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-0.6 & 2 & 17 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

- تساوي مصفوفتين:

يقال أن المصفوفتين **A ,B** متساويتان **[A=B]** إذا وفقط إذا كان :

١- **A,B** من شكل واحد .

٢- تساوي جميع العناصر المتناظرة في المصفوفتين

إذا كان :

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & X \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

أوجد قيم كل من X,y

حل :

كون :

2=x

انواع المصفوفات

١- المصفوفة المربعة

تكون المصفوفة A مربعة إذا كان عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها. فبهذه الحالة؛ يمكن أن نتكلم عن محدد المصفوفة ونرمز له بالرمز det(A) ....

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 7 & 3 & 8 \end{vmatrix} \quad ، \quad \triangle = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

٢-المصفوفة القطرية

تكون المصفوفة المربعة قطرية إذا كانت كل عناصرها تساوي الصفر ما عدا عناصر القطر الرئيسي (النازل) التي قد تساوي الصفر أو لا.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

٣- مصفوفة الوحدة

. مصفوفة الوحدة هي مصفوفة قطرية ، وكل عناصر قطرها الرئيسي تساوي I

، ويرمز لها بالرمز $n \times n$ او بالرمز I_n.

مثال:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

العمليات على المصفوفات

أولا : جمع المصفوفات :

لتكن A , B مصفوفتين كلا منهما من الشكل m×n فإن مجموعهما هي المصفوفة c وهي أيضا من الشكل m×n.

ويلاحظ من التعريف أنه لكي يمكن جمع مصفوفتين يجب أن تكونا من الشكل نفسه وبذلك كل عنصر في مصفوفة الجمع هو مجموع العنصرين المناظرين في المصفوفتين .

3+4=7

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

مثال : لتكن **A,B** مصفوفتين جد **<u>B</u>+<u>A</u> , <u>A</u>+<u>B</u>**

$$A=\begin{vmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 9 & 5 & 2 \end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix} -3 & -5 & 8 \\ -15 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل :

$$\underline{A}+\underline{B}=\begin{vmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 9 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & -5 & 8 \\ -15 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-3 & 4-5 & -7+8 \\ 9-15 & 5+7 & 2+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -1 & 1 \\ -6 & 12 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\underline{B}+\underline{A}=\begin{vmatrix} -3 & -5 & 8 \\ -15 & 7 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 9 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-3 & -5+4 & 8-7 \\ -15+9 & 7+5 & 4+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -1 & 1 \\ -6 & 12 & 6 \end{vmatrix}$$

ثانيا :طرح المصفوفات:

لتكن A , B مصفوفتين كلا منهما من الشكل m×n فإن الفرق بينهما هي المصفوفة c ، A-B=A+(-B) حيث B نظير المصفوفة (B).

3-4=-1

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}$$

مثال: لتكن A,B مصفوفتين

اوجد B-A ، A-B ثم قارن بينهما .

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} \quad , \quad B = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

الحل :

$$A-B = A+(-B) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & -7 & 2 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-4 & 2-7 & -3+2 \\ 4-3 & 1+1 & 7-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$B-A = B+(-A) = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & -2 & 3 \\ -4 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-5 & 7-2 & -2+3 \\ 3-4 & -1-1 & 6-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

نلاحظ أن : -

$\underline{A}-\underline{B} \neq \underline{B}-\underline{A}$ ونستطيع القول أن $\underline{A}-\underline{B} = -(\underline{B}-\underline{A})$

ثالثا:ضرب مصفوفة بعدد حقيقي:

أمثله : ليكن لدينا المصفوفات التالية

إذا كان :

$$B = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad , \quad A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

أحسب مايلي:

$-A+3B \quad , \quad -2A$

الحل :

$$-2A = -2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\times 3 & -2\times -1 \\ -2\times -2 & -2\times 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}$$

$$-A+3B = -1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1\times 3 & -1\times -1 \\ -1\times -2 & -1\times 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3\times 3 & 3\times 5 \\ 3\times -1 & 3\times 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 15 \\ -3 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & 16 \\ -1 & 10 \end{vmatrix}$$

رابعاً : ضرب مصفوفتين:

Matrix multiplication

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*5 + 2*0 & 1*6 + 2*7 \\ 3*5 + 4*0 & 3*6 + 4*7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ 15 & 46 \end{bmatrix}$$

مثال : جد حاصل ضرب المصفوفتين التاليتين :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Multiplication of two matrixes:

$$A * B = \begin{pmatrix} 1*5 + 2*8 & 1*6 + 2*9 & 1*7 + 2*10 \\ 3*5 + 4*8 & 3*6 + 4*9 & 3*7 + 4*10 \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 21 & 24 & 27 \\ 47 & 54 & 61 \end{pmatrix}$$

المحـــــدد

المحدد من الرتبة nxn

هو عدد حقيقي نحصل عليه من قائمة أعداد حقيقية ، باستخدام قواعد حسابية معينة تسمى العناصر ، ومرتبة على شكل صفوف وأعمدة بحيث عدد الصفوف يساوي عدد الاعمدة ويساوي n ويرمز للمحدد بالرمز det (A) .

مثال : حدد رتب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix} \qquad 3)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

الحل :

- **المحدد الأول من الرتبة 2×2 ،**
- **المحدد الثاني من الرتبة 3×3 ،**
- **المحدد الثالث من الرتبة 4×4 .**

حساب المحددات

المحدد 2×2 :

تعريف المحدد هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي (النازل) ناقص حاصل ضرب عناصر القطر غير الرئيسي (الصاعد) ، أي أن :

عناصر القطر الرئيسي

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال : احسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2\times 3) - (4\times 1) = 6 - 4 = 2$$

$$2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = (1\times 0) - (5\times -1) = 0 - (-5) = 5$$

3×3 :حساب المحدد

هناك طريقتان لحساب المحدد من الرتبة الثالثة والتي على الصورة :

أولا : طريقة التجزئة:

لأيجاد قيمة المحدد يجب ملاحظة قانون الاشارات او (قاعدة الاشارات) المبينة ادناه للعناصر داخل المحدد بغض النظر عن اشارة العنصر نفسه.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

ويعتمد في ذلك قاعدة الإشارة :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} B_{22} & c_{23} \\ B_{32} & c_{33} \end{vmatrix} - b_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & c_{23} \\ a_{31} & c_{33} \end{vmatrix} + c_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & b_{22} \\ a_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

مثال : أوجد قيمة المحدد التالي:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

ثانيا : طريقة (قاعدة الاقطار):

وهي طريقة سهلة ولكن لا تصلح إلا للمصفوفة من الرتبة الثالثة فقط ، وهي كالأتي :

الخطوة الأولى :

بإعادة كتابة العمودين : الأول والثاني على يسار المحدد كالتالي :

$$\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \\ a_{31} & b_{32} \end{array}$$

الخطوه الثانية :

نحسب حاصل ضرب العناصر الثلاثة المكونة للقطر الرئيسي والقطرين الموازيين له ، ونحسب مجموعها حسب اتجاه الأسهم كما هو موضح بالشكل السابق :

$(a_{11} \times b_{22} \times c_{33}) + (b_{12} \times c_{23} \times a_{31}) + (c_{31} \times a_{21} \times b_{32})$.......................(1)

الخطوه الثالثة :

نحسب حاصل ضرب العناصر الواقعة على القطر الثانوي (الفرعي) والقطرين الموازيين له ونحسب مجموعهما حسب اتجاه الاسهم كمايلي :

$(a_{11} \times b_{22} \times c_{33}) + (b_{12} \times c_{23} \times a_{31}) + (c_{31} \times a_{21} \times b_{32})$.......................(1)

$(c_{13} \times b_{22} \times a_{31}) + (a_{11} \times c_{23} \times b_{32}) + (b_{12} \times a_{21} \times c_{33})$.......................(2)

الخطوه الرابعة :

نوجد فرق المجموعتين في الخطوتين الثانية والثالثة أي :

المحدد = مجموع (1) – مجموع (2)

مثال :باستخدام طريقة قاعدة الاقطار أوجد محدد المصفوفة B

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل :

$$\det(B) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right.$$

$\Delta_1=[(2\times0\times3)+ (3\times-1\times3)+(1\times-1\times-1)] – [(1\times0\times3)+(2\times-1\times-1)+(3\times-1\times3)]$

$=(0-9+1) –(0+2-9)=-8+7=-1$

بعض خواص المحددات

قاعدة النقل : الخاصية الأولى

لا تتغير قيمة المحدد إذا تم تبديل الصفوف بالأعمدة والعكس .

مثال : أحسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:

١) نستخدم الخاصية الأولى من خواص المحددات :

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

٢) نستخدم الخاصية الأولى من خواص المحددات :

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -18$$

الخاصية الثانية:

إذا ما إحتوت عناصر صف ما أو عمود ما في محدد ما على عامل مشترك فإن هذا العامل المشترك يمكن إخراجه كثابت للمحدد وعليه تصبح قيمة المحدد الأصلي = العامل المشترك × محدد جديد ينتج لنا من قسمة عناصر ذلك الصف أو العمود على العامل المشترك الذي تم إخراجه.

مثال أحسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & -9 & 9 \\ 2 & -18 & 3 \\ 8 & -21 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:

١) نستخدم الخاصية الثانية من خواص المحددات بالضرب في 0.5 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.5\times 2 & 0.5\times 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.5\times\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.5\times 2 = 1$$

٢) نستخدم الخاصية الثانية من خواص المحددات وبالضرب في 3- :

$$\begin{vmatrix} 1 & -9 & 9 \\ 2 & -18 & 3 \\ 8 & -21 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3\times 3 & 9 \\ 2 & -3\times 6 & 3 \\ 8 & -3\times 7 & 4 \end{vmatrix} = -3\times\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -3\times -255 = 765$$

الخاصية الثالثة:

إذا تم استبدال عناصر صف بعناصر صف آخر، أو عناصر عمود بعناصر عامود آخر في محدد ما بنفس الترتيب فإن قيمة هذا المحدد لا تتغير عددياً ولكن تتغير الإشارة فقط (بمعنى أنه إذا كانت إشارة المحدد الأصلي (+) فإن إشارة المحدد الجديدة ستكون(-) والعكس صحيح.

مثال أحسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & -9 & 9 \\ 8 & -21 & 4 \\ 2 & -18 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل:

١) نستخدم الخاصية الثالثة بتبادل العمود الأول والثاني :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

٢) نستخدم الخاصية الثالثة بتبادل الصف الثاني والثالث :

$$\begin{vmatrix} 1 & -9 & 9 \\ 8 & -21 & 4 \\ 2 & -18 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 9 \\ 2 & -18 & 3 \\ 8 & -21 & 4 \end{vmatrix} = -765$$

الحل :

الخاصية الرابعة : قاعدة التماثل

إذا تماثل صفان أو عمودان فإن قيمة المحدد هي صفر .

مثال : احسب المحددات التالية :

$$1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

الحل:

١) بما أنّ الصف الأول والثاني متماثلان إذن:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

٢) بما أنّ العمود الأول والثاني متماثلان إذن:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

الخاصية الخامسة: قيمة المحدد القطري

قيمة المحدد القطري تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي .

مثال :أوجد قيمة المحدد التالي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1 \times 4 \times 8 = 32$$